ネイピア数 e の導入を読み解く
Decipher the Introduction of Napier's constant e

嶋　喜一郎 *
Kiichiro SHIMA

目 次

* kiichiro-s@cg8.so-net.jp

1　はじめに

ネイピア数 e は『オイラーの無限解析』[1] 第 7 章 122 節に，自然対数の底として導入されている．その e に次のような註記がある．

> オイラーは 1728 年の時点ですでに，この文字を使って自然対数の底を表わした.[1]

これが本稿のきっかけになった．次の第 8 章にはオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が提起されている．この公式は [1]（1748 年）ではじめて提起されたのではなく，それ以前に（1743 年），指数関数と三角関数のマクローリン展開の比較によって把握されていた [2]．第 7 章の e の導入も同じ経緯だったと考えるのが妥当と思えたのである．1728 年に導入された e をあらためて [1] で導入していると想定すれば,「華麗な魔法」[2]を解読できるのではないかと思えたのである．

e はネイピア数と名指しされていないが，連続複利の形（ヤコブ・ベルヌーイ，1683 年）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

として，また，対数が 1 となる数 c（ヨハン・ベルヌーイ，1697 年）

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\cdots$$

として，すでに登場していた．つまり，冪表示も無限級数表示も近似値もわかっていた．しかし，e の導入がオイラーに帰せられるのは，指数と対数の関係を明確にしていく中で，e が導入されたからだろう．

指数関数と対数関数はそれぞれ逆関数の関係にある．現在では，指数関数の逆関数として対数関数が導入されるが，歴史的には，対数関数が先にあって，その逆関数として指数関数が導入されている．これをオイラーが e の導入と並行して行ったのである．18 世紀前半には自明なものとして指数関数はなかった．オイラーがはじめて指数関数を提起したのである[3]．

[1] この文献の指示はない.『オイラーの無限解析』は 1748 年の出版，1745 年頃執筆といわれている．20 年ほど前からオイラーは使っていたことになる．

[2] 金重明が『世界は「e」でできている』[3]，p.108 で述べている 7 章の展開の形容.

[3]『数の大航海』[4]，p.188 参照.

指数関数と対数関数は「底」a によって関連している．

$$a^z = y \Longleftrightarrow z = \log_a y$$

オイラーは底に着目して対数と指数の関係を明確にした．まず，対数関数から指数関数を作る．そして指数関数の逆関数として対数関数を捉えて，相互の関係を明確にしていった．

まず，1728 年の e の導入を推察する．次に『オイラーの無限解析』第 7 章「指数量と対数の級数表示」を読んでいく．

2　1728 年における e の導入

1728 年に e を使って自然対数の底を表わした過程を推察してみよう．対数関数を $y = \log_a z$ として，微分してみよう．

$$\frac{dy}{dz} = \lim_{\omega \to 0} \frac{\log_a(z+\omega) - \log_a z}{\omega}.$$

通常このように表記するが，ここでは極限の表示をしないで，ω の 1 文字で，$\lim_{\omega \to 0}$ の意味を持たせて

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\log_a(z+\omega) - \log_a z}{\omega}$$

のように表記する．同じように i で $\lim_{i \to \infty}$ を表わすとする．すなわち

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$$

で

$$\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$$

を表わす．この表記を使って，対数関数 $y = \log_a z$ を微分してみよう．

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{\log_a(z+\omega) - \log_a z}{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \log_a \left(\frac{z+\omega}{z}\right) \\ &= \frac{1}{\omega} \log_a \left(1 + \frac{\omega}{z}\right). \end{aligned}$$

ここで $\omega = \dfrac{z}{i}$ とおくと[4]，$\dfrac{\omega}{z} = \dfrac{1}{i}$，$\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{i}{z}$ である．したがって

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{i}{z} \log_a \left(1 + \frac{1}{i}\right) \\ &= \frac{1}{z} \log_a \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i \end{aligned}$$

である．ここで，連続複利の形 $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$ を e とおくと

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} \log_a e$$

[4] これはオイラーの無限解析の基本にある設定．ω を無限小数，i を無限大数としたときに有限な値 z との間に，$z = i\omega$，$\omega = z/i$，$i = z/\omega$ という関係を想定する．

となる．対数の底 a を e とおけば，$\log_e e = 1$ だから

$$\frac{d \log_e z}{dz} = \frac{1}{z}$$

となり，直角双曲線 $y = 1/x$ と面積 $\log x$ の関係が出てくる[5]．1728 年のネイピア数 e の導入は微分によって抽出された連続複利の形に着目することによってなされたといえるだろう．

自然対数の底として e を導入したことは，自然対数の底を連続複利の形 $\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$ で捉えたことを意味する．ここが跳躍点だった．

$$\log_{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i} y$$

という形である[6]．その頃みずから明らかにしつつあった対数と指数の関係

$$a^z = y \Longleftrightarrow z = \log_a y$$

に連続複利の形を入れてみると

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{iz} = y \Longleftrightarrow z = \log_{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i} y$$

である．

対数と指数を連絡する底に「冪」が入ることによって，指数関数を e^z を含めて，一般的な指数関数 a^z を冪から作り上げるという課題が生まれた．そして対数関数にも「冪」の考えは反転した．対数関数も「冪」から見ることになったのである．

$$e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$$

は一瞬だったろう[7]．問題は一般的な a^z である．a^z はどのように表記されるだろうか．これも対数関数が参考になるだろう．e^z を包み込めるような「冪」をオイラーは求めたのである．

3　対数と指数の起点

対数関数 $y = \log_a z$ を微分すると

$$\frac{1}{z} \log_a e$$

だった．ここで $z-y$ 平面を想定する（z が横軸，y が縦軸）．$y = \log_a z$ のグラフは，すべて点 $(1,\ 0)$ を通る．$\log_a 1 = 0$（1 の対数は 0，$z = 1$ のとき $y = 0$）は点 $(1,\ 0)$ に対応する．ここを対数の起点としよう．また，グラフは点 $(1,\ 0)$ において傾き $\log_a e$ をもっている．特に y が自然対数のとき，$a = e$ で，傾き $\log_e e = 1$ である．

対数の起点から $z-y$ を反転させることによって，オイラーは指数関数の起点を設定する．

---

[5] [1] の註記に，1647 年に双曲線とその漸近線で囲まれた部分の面積が自然対数と関係があることが発見され，自然対数は双曲線対数ともよばれるようになったとある．また，[4]（p.186）によれば，ニュートンとライプニッツは微積分を考え始めた早い段階から

$$d \log x = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{x} = \log x$$

であることは知っていたという．

[6] この形はネイピアやビュルギの対数の研究から導かれたものだろう．付録 1「自然対数の「底」の原型」参照．

[7] これは連絡の始まりである．対数と指数は e を媒介にして連絡したのである．

$$e^z = y \Longleftrightarrow z = \log_e y$$

対数関数 $y=\log_a z$ の逆関数をまず求めてみよう．変数 y と z を入れ替えると $z=\log_a y$，これを y について解くと

$$y=a^z$$

となる．これが指数関数である．ここで，対数関数の起点 $\log_a 1=0$（$z=1$，$y=0$）は指数関数の起点 $a^0=1$（$z=0$，$y=1$）に移るだろう．同じ $z-y$ 平面で見れば，対数関数の起点 (1，0) は指数関数の起点 (0，1) になる．

$y=a^z$ を微分すると（ここでも極限の表示をしないで，ω の 1 文字で，$\lim_{\omega\to 0}$ の意味を持たせる）

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dz}&=\frac{a^{z+\omega}-a^z}{\omega}\\&=a^z\frac{a^\omega-1}{\omega}\end{aligned}$$

となる．$z=0$ とおくと，$a^0=1$ だから，$y=a^z$ の (0，1) での微分係数（傾き）は

$$\frac{dy}{dz}=\frac{a^\omega-1}{\omega}$$

であることがわかる．

$$\frac{a^\omega-1}{\omega}=k$$

とおいて，この値を推定してみよう．

対数関数 $y=\log_a z$ の (1，0) での微分係数（傾き）が $\log_a e$ であったことを想起すれば，その逆関数ということから

$$k=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a$$

となるべきものである．その中に $k=1$ もあるだろう[8]．

冪と級数表示は二項定理で連絡している．冪での展開の成否は，その冪の級数表示を，すでに解析から導かれている成果と比較すれば，確認できるだろう．

また，対数の級数表示と対数表の作成は直結している．級数が効率よく収束すれば，対数表の作成に展望が開けるだろう．

4　『オイラーの無限解析』7 章の概略

これから『オイラーの無限解析』7 章「指数量と対数の級数表示」のすべてをみていく．7 章は翻訳で 9 ページ，114 節から 125 節までである．それはおよそ次のような構成になっている．(　) 内は節の番号である．

1. 冪から指数関数を作り，指数関数の冪表示と級数表示をする (114，115，116，117).
2. 指数関数の逆関数として対数を把握し直し，対数関数の冪表示と級数表示を導く (118，119).
3. 対数の級数表示から効率的に収束する級数を見つける (120，121).
4. ネイピア数 e を導入する (122).
5. 対数表を作成する (123).
6. 底 a と比 k の関係を導く (124).
7. 任意の指数関数を自然対数を使って表示する．指数関数と対数関数の冪表示を確認する (125).

[8] 対数が自然対数 $\log_e z$ のとき（底 $a=e$），微分係数（傾き）は $\log_e e=1$ だった．それに対応する自然指数（底 $a=e$）e^z の $k=1$ である．

この間，底 a と比 k の依存関係についての言及があり（114，115，116，119，120，121），6．で明確になっている（124）．7 章をつらぬく問題意識である．

ここからは基本的にオイラーの展開の引用である[9]. すべての式をとり上げる．そしてそれに解説や注釈をくわえていく．そのままの引用には「　」をつけたり，字下げで示す．また，対数表示には「底」を付け加えている．

『オイラーの無限解析』の緒言にちょうど 7 章の展開と重なる箇所 (vi–vii) があるので，引用しておこう．ここで指数量とあるのは指数関数のことである．

> 私は冪から出発して指数量へと歩を進めた．指数量というのは，その冪指数が変化量である冪にほかならないが，これを逆転することにより，きわめて自然で，しかも豊饒な対数の観念が手に入ったのである．このような道を歩むと，対数というもののめざましい効用がおのずと明るみに出されるが，それればかりではない．普通，対数を表示するのに使われる習慣が確立されているあらゆる無限級数もまた，この道筋の中から取り出されてくるのである．それに対数表を作成する方法も，この道筋をたどることによりごく簡単に明らかになる．

5　指数関数の冪表示と級数表示

5.1　端緒

$a > 1$ とする．オイラーは $a^0 = 1$ の両辺に無限に小さい変化 ω を加えることから始めている.「冪指数が無限小だけ 0 を越えたなら，冪もまた無限小だけ 1 を凌駕する.」

$$a^\omega = 1 + \psi.$$

ここで ω は「無限に小さい数，すなわち，どれほどでも小さくてしかも 0 とは異なる分数」[10]である．

ψ も無限小数である．ω と ψ の関係は $\psi = \omega$ か，$\psi > \omega$ か，$\psi < \omega$ のいずれかである．a に依存する比 k を想定し，$\psi = k\omega$ とおくと

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

である[11]．a を対数の底にとれば,

$$\omega = \log_a(1 + k\omega)$$

となる．ここが出発点である．

[9] ページ数を記さないが，　すべて [1]，pp.99–107 からの引用である．

[10] オイラーの無限に踏み込む方法である．ω は無限小数，その対極が無限大数 i である.「分数」とあるのは，有限な値 z との間に，$\omega = z/i$ の関係を設定しているからである．ω は「無限に大きい分母をもつ分数」である．

志賀浩二によれば，オイラーの方法は現代数学の立場から見れば,「算術的演算と無限演算の混淆があり，論理性に欠ける」ということである．しかし，志賀は「発見的な道」としてオイラーの方法を擁護している [4]，p.196.

また，金重明によれば,「厳密さに欠ける」オイラーの無限解析は $\varepsilon - \delta$ 論法によって修正される一方で，20 世紀後半の超準解析によって，無限小数の存在を仮定しても，数体系に矛盾が生じないことが証明され，無限小数や無限大数が復権しているという [3]，pp.56–57.

[11] これは「対数と指数の起点」で述べた

$$\frac{a^\omega - 1}{\omega} = k$$

である．

5.2 底 a と比 k の依存関係の確認

比 k は底 a に依存している．この関係を $a = 10$ と設定し，常用対数表を使って，k の値を確認している．

$$k\omega = \frac{1}{1000000}$$

とすると

$$\log_{10}\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = \log_{10}\frac{1000001}{1000000} = 0.00000043429 = \omega.$$

したがって

$$\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000} = 0.43429$$
$$k = \frac{100000}{43429} = 2.30258$$

となる[12]．

5.3 冪表示と級数表示

オイラーは冪から指数関数を作る．$a^{\omega} = 1 + k\omega$ であるから，i にどのような値を代入しても

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^{i} \tag{5.1}$$

となる．二項定理より

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^{2}\omega^{2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^{3}\omega^{3} + \cdots \tag{5.2}$$

となる．ここに

$$a^{z} = y$$

が重ねられる．底 a の冪指数 $i\omega$ と z が等置される．

$$i\omega = z.$$

オイラーは次のように述べている．

> そこで z はある有限数を表わすものとして，$i = \dfrac{z}{\omega}$ と定めると，ω は無限小数であるから，i は無限大数になる．これより，$\omega = \dfrac{z}{i}$．したがって ω は無限に大きい分母をもつ分数である．すると，ω は無限小であることになるが，これはあらかじめそのように設定されていた通りの状勢である．

最初に設定した無限小数 ω を基に，有限数 z を取り込むには，ω と z に対して，i を

$$i = \frac{z}{\omega}$$

と設定し，ω を

$$\omega = \frac{z}{i} \tag{5.3}$$

[12] 2 つの数値は常用対数と自然対数の変換の比である．0.43429 は自然対数から常用対数のとき，2.30258 は常用対数から自然対数のとき乗ずるものである．歴史的には 0.43429 はブリッグスの『対数算術』1624 年に出て来る [5]，p.224．また，メルカトルは 1668 年に自然対数から常用対数を求めるときに，この数字をかければよいと指摘している [4]，p.182．他方，2.30258 は数字の並びとしては，歴史的にはネイピアの対数表において，桁が 1 桁違う数値の処理でおいて必要になってきたものだった [5]，pp.142–143．この 2 つの数値は 124 節で理論的に裏付けられる．

と見直せばよいという方法[13]を述べている．

これによって，両辺を単に累乗するだけに導入されたと思われた i は無限大数に変わる．(5.1) 式と (5.2) 式に (5.3) 式を代入すると[14]

$$a^z = \left(1+\frac{kz}{i}\right)^i = 1+\frac{1}{1}kz+\frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2+\frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4+\cdots$$

となる．i は無限に大きい数だから

$$\frac{i-1}{i}=1,\quad \frac{i-2}{i}=1,\quad \frac{i-3}{i}=1,\quad \cdots$$

である．したがって

$$a^z = \left(1+\frac{kz}{i}\right)^i \tag{5.4}$$

$$= 1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \tag{5.5}$$

となる．

指数関数 a^z の冪表示と級数表示が得られた．

5.4 底 a と比 k の関係式

(5.5) 式で $z=1$ とおくと

$$a = 1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \tag{5.6}$$

となり，a と k の関係がはっきりする．例えば，$a=10$ であるためには，k=2.30258 でなければならない．

5.5 任意の指数関数の表示

次に，オイラーは与えられた底 a に依存する k の値がわかっているとき，任意の指数関数がどのように表示されるか[15]を示している．これは対数の黄金則[16]を指数関数に転位させているとみることができるだろう．

オイラーは $b=a^n$ と設定して始めている．ここで a を対数の底にとると $\log_a b = n$ となる．$b^z=a^{nz}$ であるから，これを (5.5) 式に代入すると

$$b^z = 1+\frac{knz}{1}+\frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4n^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \tag{5.7}$$

と表示される．n の代わりに $\log_a b$ を用いると

$$b^z = 1+\frac{kz}{1}\log_a b+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(\log_a b)^2+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log_a b)^3+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log_a b)^4+\cdots \tag{5.8}$$

[13] 冪から指数関数を作るという問題意識において無限解析の方法（$i\omega = z$）が着想されたのではないかと推察できる．

[14] $\left(1+\frac{kz}{i}\right)^i = 1+\frac{i}{1!i}(kz)+\frac{i(i-1)}{2!i^2}(kz)^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{3!i^3}(kz)^3+\cdots$

[15] 例えば，底が e で k が 1 の指数関数 e^x に対して，底が 10 の指数関数 10^x の表示である．

[16] 対数の黄金則とは，「二種類の対数系において，同じ数の対数はつねに相互に同一の比率を保有する」6 章 [1] というものである．これは，常用対数と自然対数が一定の比率で相互に転換できることの根拠となっている．同じ数 m に対する二つの対数系を考える．$a^p=m$, $b^q=m$ とおくと，$a^p=b^q$ である．したがって $b=a^{\frac{p}{q}}$ となる．分数 $\frac{p}{q}$ は一定値 (n) をもつことになる．オイラーは $b=a^n$ とおいて，底 a に依存する k の値がわかっている指数関数 a^z に対して底 b の指数関数 b^z を提示する．

となる．

これが底 a と k の値が知られているときの任意の指数関数の無限級数表示[17]である．この式には「対数」が含まれている．ここで「対数」とは「冪指数」の対数ではなく，記号 log で表示される対数のことである.「対数」の助けを借りて，指数関数が表示されている．(5.8) 式は指数関数の形のなかに「対数」が内在していて，指数関数と対数関数の「境界」に位置しているようにみえる．このように冪から指数関数を導いてきて，その中に「対数」が組み込まれている式を提示して，オイラーは対数の冪表示と級数表示へ移る．

6　対数関数の冪表示と級数表示

6.1　対数関数の着目点

ここでは指数関数

$$a^{i\omega} = (1+k\omega)^i$$

の冪指数（対数）$i\omega$ に焦点があたる．

$$a^{i\omega} = (1+k\omega)^i \iff i\omega = \log_a (1+k\omega)^i$$
$$(a^z = y \iff z = \log_a y)$$

指数関数の冪表示では冪指数は i だったから，対数関数の冪指数は i の逆数，$1/i$ が求められるだろう．

6.2　冪表示

対数の出発点は，$\omega = \log_a(1+k\omega)$ である．両辺を i 倍すると

$$i\omega = \log_a (1+k\omega)^i \tag{6.1}$$

となる．

i を無限大数とすれば，冪 $(1+k\omega)^i$ の値は,「1 よりも大きい任意の数」に到達する．そこで

$$(1+k\omega)^i = 1+x \tag{6.2}$$

とおく[18]．ここで両辺の i 乗根（$1/i$ 乗）をとると

$$1+k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}} \tag{6.3}$$

である。よって

$$k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}} - 1 \tag{6.4}$$

[17] 冪で表示すれば

$$b^z = \left(1 + \frac{kz\log_a b}{i}\right)^i$$

である．

[18]「1 よりも大きい任意の数」とだけ述べられているが，ニュートンが級数表示をした

$$\log_e(1+x) = \int \frac{1}{1+x}$$

が背景にある．

となる．これより（両辺を k でわり，i をかけると）

$$i\omega = \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right) \tag{6.5}$$

である．(6.1) 式と (6.2) 式より

$$i\omega = \log_a(1+x) \tag{6.6}$$

となる．

(6.5) 式と (6.6) 式から

$$\begin{aligned}\log_a(1+x) &= \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right) \\ &= \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}\end{aligned} \tag{6.7}$$

となる．これが対数関数の冪表示である．

これは指数関数 $a^{i\omega}$ の冪指数 $i\omega$ に着目して導かれたものである．指数と対数の基礎にもとづいた導出である．別の導き方も考えられる．それは「任意の指数関数の表示」b^z の $\log_a b$ に着目するものである．付録 2「対数の冪表示の導出　別解」に示す．

6.3　級数表示

次は級数表示である．一般二項定理[19]より

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{i}} &= 1 + \frac{\frac{1}{i}}{1}x + \frac{\frac{1}{i}\cdot(\frac{1}{i}-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{i}\cdot(\frac{1}{i}-1)\cdot(\frac{1}{i}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{i}\cdot(\frac{1}{i}-1)\cdot(\frac{1}{i}-2)\cdot(\frac{1}{i}-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1\cdot(i-1)}{i\cdot 2i}x^2 + \frac{1\cdot(i-1)\cdot(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3 \\ &\quad - \frac{1\cdot(i-1)\cdot(2i-1)\cdot(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

である．i は無限大数だから

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}, \quad \frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}, \quad \cdots,$$

よって

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{x}{i} - \frac{x^2}{2i} + \frac{x^3}{3i} - \frac{x^4}{4i} + \cdots \tag{6.8}$$

両辺に i をかけると

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{6.9}$$

[19]冪指数が自然数の二項定理に対して，冪指数を実数に拡張した二項定理．ここでは分数（$1/i$）が冪指数になっている．

したがって，(6.7) 式より

$$\begin{aligned}
\log_a(1+x) &= \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k} \\
&= \frac{1}{k}\Big(i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\Big) - \frac{i}{k} \\
&= \frac{1}{k}\Big(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\Big) \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

(6.10) 式の (　　　) のなかはニュートンやメルカトルの自然対数の無限級数表示である．オイラーは冪から展開してきた一般的な対数の級数表示のなかに自然対数の無限級数表示を保存しているのである[20].

7　効率的に収束する級数の作成

底 a と比 k の関係式 (5.6) 式は，指数関数の級数表示をもとに導かれた．この式は a が k の級数で表わされた．ここでは対数関数の級数表示から底 a と比 k の関係が導かれる．こんどは逆に k が a の級数で表わされる．この方向なら，$a = 10$ のとき k が 2.30258 という数値になるかどうか判断しやすくなる．

(6.10) 式において，$1 + x = a$ とおくと

$$x = a - 1$$

となる．$\log_a a = 1$ より

$$1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots\right)$$

となる．よって

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots \qquad (7.1)$$

が得られ，底 a から k の値を定めることができる．$a = 10$ とおけば，k=2.30258 になるはずだが

$$\frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \cdots$$

は収束する気配はない．

「この不都合な状勢に対処する救済策はまもなく与えられるだろう.」$a = 10$ を使い，$x < 1$ となるような無限級数表示をオイラーは提示する．

[20]ニュートンは双曲線 $y = 1/1 + x$ を実際に割り算をして，あるいは一般二項定理で展開して

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

を得，これを積分することによって

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

を導いた．

(6.10) 式で x を負とみると[21]

$$\log_a(1-x) = -\frac{1}{k}\Big(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\Big) \tag{7.2}$$

となる．したがって，(6.10) 式から (7.2) 式を引くと

$$\log_a(1+x)-\log_a(1-x) = \log_a\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k}\Big(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\Big) \tag{7.3}$$

となる．ここで (7.1) 式と同じような底 a から k の値を求める式を導く．

$$\frac{1+x}{1-x} = a$$

とおくと

$$x = \frac{a-1}{a+1}$$

となる．$\log_a a = 1$ により

$$k = 2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+3)^5}+\cdots\right)$$

$a = 10$ とおくと

$$k = 2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\frac{9^7}{7\cdot 11^7}+\cdots\right)$$

となる.「この級数の諸項は際立った早さで減少していく．したがって，k の値をすぐに十分に高い精度で近似的に提供してくれるのである.」

8　ネイピア数 e の導入

オイラーは冪 $(1+k\omega)^i$ を展開して，指数関数の一般的な無限級数表示 (5.5) 式と対数関数の一般的な無限級数表示 (6.10) 式を導いた．あらためて並べてみると

$$\begin{aligned} a^z &= 1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \\ \log_a(1+x) &= \frac{1}{k}\Big(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\Big) \end{aligned}$$

である．また，対数の級数が速く収束するように改善した (7.3) 式

$$\log_a\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k}\Big(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\Big)$$

も並べてみよう．解析の歴史からも，対数表作成の観点からも，$k=1$ とおくことが自然となってきたことがわかるだろう．オイラーは次のように言っている.「対数系の作成にあたり，底 a は意のままに受け入れることができるから，$k=1$ となるように採ることも可能である．そこで $k=1$ としてみよう.」(5.6) 式より

$$a = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

---

[21]

$$\begin{aligned} \log_a(1+(-x)) &= \frac{1}{k}\Big(\frac{-x}{1}-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+\cdots\Big) \\ &= \frac{1}{k}\Big(-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\Big) \end{aligned}$$

となる．これは 2.71828 18284 59045 23536 028 という値になる．これを e という文字で表わすと，この数は自然対数もしくは双曲線対数の底[22]を表わし，$k=1$ に対応している．いいかえると，文字 e は無限級数

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \tag{8.1}$$

の和を表わしている．

上に並べた 3 つの式で $k=1$ とすると

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \tag{8.2}$$

$$\log_e(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots \tag{8.3}$$

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \cdots \tag{8.4}$$

となる[23]．

e^z と $\log_e(1+x)$ を包み込む冪の展開に成功したのである．それに対数表を作成する方法も明らかになっている．

また，冒頭にもどれば

$$a^\omega = 1 + k\omega$$
$$\omega = \log_a(1+k\omega)$$

が

$$e^\omega = 1 + \omega$$
$$\log_e(1+\omega) = \omega$$

になる[24]．

9　対数表の作成

(8.1) 式の直後に，オイラーは次のように述べている．

> それゆえ双曲線対数には，数 $1+\omega$ の対数が ω に等しくなるという性質が備わっている．ここで ω は無限小量を表わす．そうしてこの性質から k の値は 1 に等しいことが判明し，すべての数の双曲線対数を明示することが可能になる．

---

[22] 冒頭の註記はここにつけられていたものである．ボイヤー『数学の歴史 4』[7] を参照し補足しておこう（p.78）．ネイピア数をはじめて記号で表わしたのはライプニッツで，1690 年にホイヘンスへの手紙の中で記号 b を使った．次にヨハン・ベルヌーイが 1696 年にライプニッツへの手紙の中で記号 c を使っている．オイラーは 1727 年から記号 e を使いはじめ，1731 年にゴールドバッハへの手紙の中でも e を使っている．書物では 1736 年『力学』ではじめて e が印刷された．なぜ e かといえば，アルファベットの前の文字で定数を表わす習慣があり，あまり使われていない最初の文字として exponential（指数）の e が選ばれたのだろう．

なお，exponential はシュティーフェルが冪指数を表示するために導入したラテン語 exponens（外に置く）に由来する（1544 年）．

[23] これらはすべてマクローリン展開から導かれるものと一致する．(8.4) 式を対数の冪から導いたのはオイラーだが，式自体はニュートンも知っていて（1676 年），他の級数と組み合わせて自然対数を計算している [4]，p.174.

[24] 高瀬正仁の『無限解析のはじまり』[6] に奇妙な箇所（pp.308–309）がある．対数の無限多価性を証明していく「枕」の部分である．7 章の冒頭は $e^\omega = 1+\omega$ だと思い込んでいるのである．そして本当の $a^\omega = 1+k\omega$ と重なって，$e^\omega = 1+k\omega$ と設定して，k の値を求める展開が 1 ページほど続いている．e^ω ならはじめから $k=1$ と決まっているのだが．

これは $k=1$ だから $\log_e(1+\omega)=\omega$ ではなく，$\log_e(1+\omega)=\omega$ だから $k=1$ という指摘である．自然対数が自動的に $k=1$ になることの確認である.「それ」はネイピア数 e を指すから，e の導入から $\log_e(1+\omega)=\omega$ を確認しておこう．

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = e.$$

$\omega = 1/i$ より

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} = e.$$

両辺の双曲線対数（自然対数）をとると

$$\begin{aligned}\log_e(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} &= \log_e e\\ \frac{1}{\omega}\log_e(1+\omega) &= 1\\ \log_e(1+\omega) &= \omega\end{aligned}$$

となる．このようにオイラーは $k=1$ を確認して，1 から 10 までの整数の自然対数を計算している．1 つ 1 つ計算するのではなく，効率よく実行するために，(8.4) 式に 1/5，1/7，1/9 を代入することからはじめている．

$x=1/5$ を代入すると

$$\log_e\frac{6}{4} = \log_e\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5^3}+\frac{2}{5\cdot 5^5}+\frac{2}{7\cdot 5^7}+\cdots.$$

$x=1/7$ とすると

$$\log_e\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7}+\frac{2}{3\cdot 7^3}+\frac{2}{5\cdot 7^5}+\frac{2}{7\cdot 7^7}+\cdots.$$

$x=1/9$ とすると

$$\log_e\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9}+\frac{2}{3\cdot 9^3}+\frac{2}{5\cdot 9^5}+\frac{2}{7\cdot 9^7}+\cdots.$$

これらの分数（3/2，4/3，5/4）の対数から，対数の性質を使って，整数の対数を計算している（底 e は省略）．

$$\begin{aligned}\log 1 &= 0\\ \log 2 &= \log(3/2)+\log(4/3)\\ \log 3 &= \log(3/2)+\log 2\\ \log 4 &= 2\log 2\\ \log 5 &= \log(5/4)+\log 4\\ \log 6 &= \log 2+\log 3\\ \log 8 &= 3\log 2\\ \log 9 &= 2\log 3\\ \log 10 &= \log 2+\log 5\end{aligned}$$

しかし，$\log 7$ は (8.4) 式に戻って，まず $x = 1/99$ として $\log(100/98) = \log(50/49)$ を計算する[25]．次に，$\log(50/49) = \log 2 + 2\log 5 - 2\log 7$ だから

$$\log 7 = \frac{\log 2 + 2\log 5 - \log(50/49)}{2}$$

[25]示されている数値は 0.02020 27073 17519 44840 80453 である．

から求める[26]．1 から 10 までの双曲線対数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\log 1 &= 0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\\
\log 2 &= 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321\\
\log 3 &= 1.09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452\\
\log 4 &= 1.38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642\\
\log 5 &= 1.60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593\\
\log 6 &= 1.79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24774\\
\log 7 &= 1.94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 53527\\
\log 8 &= 2.07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964\\
\log 9 &= 2.19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905\\
\log 10 &= 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79915
\end{aligned}
$$

ネイピア数 e の導入により導かれた (8.4) 式を使って，$\log_e 10$ を計算することは，ネイピア以降，2 つに分かれた常用対数（代数，数値計算）と自然対数（解析，関数）を統一する場所で行われたことを象徴しているといえるだろう．

10　底 a と比 k の関係

10.1　$k = \log_e a$ の導出

次にオイラーは自然対数 $y = \log_e(1+x)$ と底 a の対数系 $\nu = \log_a(1+x)$ との関係に着目して，底 a と比 k の関係を求めている[27]．

$$
\begin{aligned}
\log_e(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\\
\log_a(1+x) &= \frac{1}{k}\Big(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\Big)
\end{aligned}
$$

である．級数部分に着目して

$$k \log_a(1+x) = \log_e(1+x). \tag{10.1}$$

(10.1) 式で，$1 + x = a$ とおくと，$\log_a a = 1$ より

$$k = \log_e a$$

[26] 高橋浩樹は『オイラー無限解析の源流』で $x = 1/99$ ではなく，$x = 1/6$ でよかったと指摘している．(8.4) 式に $x = 1/6$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
\log_e \frac{7}{5} &= \frac{2}{1\cdot 6} + \frac{2}{3\cdot 6^3} + \frac{2}{5\cdot 6^5} + \frac{2}{7\cdot 6^7} + \cdots\\
&= \log 7 - \log 5
\end{aligned}
$$

より，$\log 7 = \log_e \frac{7}{5} + \log 5$ で計算できる．オイラーの計算より簡略になる．代入する値として 1/5，1/7，1/9 に対して，1/99 はあまりにも突然であり，$\log 7$ の近似値にのみ誤差があるという [8]，p.62.

オイラーの $x = 1/99$ はニュートンの $\log 7$ の求め方を踏襲したもののようである．ニュートンは，$7 = \sqrt{\frac{100\times 0.98}{2}}$ と考え，$\log 0.98$ を無限級数から計算した [4]，pp.174–175.

[27] オイラーは $\nu = y/k$ の関係から，$k = y/\nu$（k は「ある数の双曲線対数を，底 a から作られる同じ数の対数で割るときの商に等しい」）を導き,「同じ数」として a を採ると，$\nu = 1$ となることから，k は底 a の自然対数（双曲線対数）に等しくなる，としている。しかし，ここでは y と ν を使わないで導く．

である．k は底 a の自然対数（双曲線対数）に等しくなる．

底 a と比 k の関係は，ほとんどの節で言及があった．比 k は底 a に依存している，と．これは e^z から a^z に拡張するとき,「底」e に a を,「比」1 に k を重ねたために生じた問題だった[28]．オイラーは $a^\omega = 1 + k\omega$ の累乗から，k を含む指数関数 a^z と対数関数 $\log_a(1+x)$ の冪表示と無限級数表示を展開してきた．$k=1$ に対応する底 a を e とすれば，それまで自然対数や双曲線対数と称されてきた対数と一致する．ネイピア数 e の導入によって，自然対数 $\log_e(1+x)$ と k を含む対数 $\log_a(1+x)$ がそれぞれ自立して比較できるようになり，底 a と比 k の関係は $k = \log_e a$ とわかったのである．この過程を初めから示せば

$$\frac{e^\omega - 1}{\omega} = 1 \longrightarrow \frac{a^\omega - 1}{\omega} = k \longrightarrow \frac{a^\omega - 1}{\omega} = \log_e a$$

である．

e^ω から a^ω へ拡張するとき，k は指数関数 $y = a^z$ の $(0, 1)$ での微分係数（傾き）だった．その値は対数関数 $y = \log_a z$ の $(1, 0)$ での微分係数 $\log_a e$ の逆数と予想された．実際，見てきたように $1/\log_a e = \log_e a$ と同定されたのである[29]．

10.2　自然対数と常用対数

任意の対数と自然対数の関係は

$$\log_a z = \frac{1}{k}\log_e z = \frac{1}{\log_e a}\log_e z$$

となる．

k は底 a の自然対数（双曲線対数）に等しくなる．それゆえ，常用対数（$a = 10$）では k は 10 の自然対数（双曲線対数）$\log_e 10$ に等しく

$$k = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79915$$

となる．そこで，個々の自然対数（双曲線対数）を常用対数に変換するには，k で割るか，その逆数 $1/k = 1/\log_e 10 = \log_{10} e$

$$0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289$$

を乗ずればよいことになる．式で示せば次のようになる．

$$\log_{10} z = \frac{1}{k}\log_e z = \frac{1}{\log_e 10}\log_e z$$

[28] ここの e^z は 1728 年のものである．オイラーは対数と指数を底 $(1+\frac{1}{i})^i = e$ でつないだ．このとき生じた指数関数である．この拡張を微分係数の形で示せば次のようになる．

$$\frac{e^\omega - 1}{\omega} = 1 \longrightarrow \frac{a^\omega - 1}{\omega} = k$$

[29] (10.1) 式で，$1 + x = e$ とおくと，$\log_e e = 1$ より

$$k = \frac{1}{\log_a e}$$

である．

特殊な例だが，10 の自然対数 $\log_e 10$（=2.3028···）と 10 の常用対数 $\log_{10} 10$（=1）の変換では，$0.43429\cdots\times 2.3028\cdots$，つまり $1/k\times k$ だから，たしかに 1 になる．

$2.3028\cdots=k$ と $0.43429\cdots=1/k$ は，ここでは自然対数と常用対数の換算の係数として提示してあるが，歴史的には，$2.3028\cdots=k$ はネイピアの対数表に，$0.43429\cdots=1/k$ はブリッグスの対数表に現れていた．ネイピアの $2.3028\cdots=k$ の関係を次に示す．ブリッグスの $0.43429\cdots=1/k$ については付録 3 に示す．

10.3　ネイピア対数における $k=\log_e a$

ネイピアの対数に $k=\log_e 10$ は出ていた．桁の違う真数の扱いにおいてである．ただし，ネイピアの対数の始点は 10^7 だったので，数字の並びは同じだが，大きさは違った．桁の違う真数に対する処理として 23025842 の倍数を足したり引いたりしなければならなかったのである．これはネイピアの対数の実用上の欠点だった．ネイピアの対数では「真数が 10 倍される（10 で割られる）ときに引く（足す）数が，23025842 というような複雑な数」だったのである[30]．

「自然対数の「底」の原型」（付録 1）で述べたように，ネイピアに「底」という概念はなかったが,「底」に相当するものは

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \fallingdotseq \frac{1}{e}=0.367879\cdots$$

だった[31]．この深い底から 23025842 は表出されていたのである．

ネイピアの対数で真数が 10 倍になるときは次のようになる．

$$\begin{aligned} y_n &= \log_{\frac{1}{e}} 10X \\ &= \log_{\frac{1}{e}} 10+\log_{\frac{1}{e}} X \\ &= -\log_e 10+\log_{\frac{1}{e}} X. \end{aligned}$$

真数が 10 倍になると，ネイピアの対数ではもとの $\log_{\frac{1}{e}} X$ の値から 23025842（$k=\log_e 10$ の 10^7 倍）を引くことになる．これに対して，常用対数の場合は底が 10 なので，真数が 10 倍されたときの対数は

$$\begin{aligned} y_c &= \log_{10} 10X \\ &= \log_{10} 10+\log_{10} X \\ &= 1+\log_{10} X \end{aligned}$$

となり，$\log_{10} X$ の対数に 1 を足すだけでよくなったのである．ネイピアの対数では「底」$1/e$ が埋もれたまま，ネイピア数 e と十進数の 10 が結びついていたのである．

オイラーが最初の節で a と k の関係を確認したとき，$k\omega=1/1000000$ で試していた．これは偶然ではなかったのだろう．これは $1/10^6$ であり，10^6 は 10^7（ネイピア対数の初項）の 1/10 なっていたのである[32]．

$k=\log_e a$ の関係は，対数系の数値関係（例えば，自然対数と常用対数の関係や歴史的な対数系に現れていた数値）の理論的な裏付けにとどまらない．自然指数関数と任意の指数関数の関係が明確になるのである．

---

30 [5]，p.213.

31 $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \fallingdotseq \frac{1}{e}$ は「底」に相当すると同時に,「真数」が減衰していく速度も表わしている．付録 4「ネイピア対数の定義とネイピア数 e の導出」参照.

32 山本義隆（[5]，p.142）によれば，23025842 は『記述』（ネイピア著）でも，説明がなく，唐突に出て来るのだという．これを山本は $\mathrm{Dln}(10^6)=23025842$（$10^6$ のネイピア対数が 23025842）だと指摘している．正確には $\mathrm{Dln}(10^6)=23025849.8$ だとして，この関係をネイピア対数の基礎にもどって

$$10^7\times\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{23025849.8}=999999.998$$

11　指数関数と対数関数の冪表示

11.1　任意の指数関数の級数表示

任意の指数関数の定式化はネイピア数 e 導入の最高の帰結である．この式を 2 つ観点から見ることができる．１つは，指数関数と対数関数の「境界」に位置して 2 つの関数をつなぐという点である．もう 1 つは，指数関数 a^z の十全な表現であるという点である．

「境界」の方から見ておこう．オイラーはまず，指数関数の級数表示を示している．最終節の前半である．すべて引用しよう．

> さて，
>
> $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \tag{11.1}$$
>
> であった．$a^y = e^z$ と置いて「両辺の」双曲線対数を取れば，$\log_e e = 1$ より $y \log_e a = z$ となる．そこでこの値を z に代入すれば，
>
> $$a^y = 1 + \frac{y \log_e a}{1} + \frac{y^2 (\log_e a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3 (\log_e a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \tag{11.2}$$
>
> となる．これより，任意の指数量が，双曲線対数の助けを借りて，無限級数を用いて書き表わされることになる．

(11.1) 式はネイピア数 e 導入後の自然指数関数である．この式に $y \log_e a = z$ を代入したものが (11.2) 式である．(11.2) 式は，117 節の (5.8) 式（任意の「底」とその底に依存する「k」で表示した）において，底を e, $k = 1$ としたものに対応する[33]．

(5.8) 式は，指数関数 (5.5) 式に対数の黄金則 $a^p = b^q (b = a^n)$ を根拠に導かれた $\log_a b$ を代入したものだった．それは指数関数の形のなかに「対数」を内在させ，指数関数と対数関数の「境界」に位置していた．オイラーはこの式を提示した後で，対数関数の冪表示と級数表示を展開していった．最終節では $a^y = e^z$（一方の底がネイピア数 e に替わったもの，しかも関数である.）が根拠となっている．ここでもまったく同じ過程が底を a から e に替えて繰り返される．自然指数関数に対応する任意の指数関数が導かれる．(11.2) 式は自然指数関数の形に「双曲線（自然）対数」が導入され,「双曲線（自然）対数」を内在して，自然指数関数と自然対数関数の「境界」に位置している．これは級数表示だが，冪表示の方が簡潔なので後半を引用してから続けよう．

11.2　3 つの冪表示の関係

オイラーは指数関数と対数関数の冪表示を並べている．

> また，i は無限大数を表わすとするとき，指数量と対数は双方ともに冪を用いて表示される．実際，
>
> $$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i \tag{11.3}$$

と確認している．右辺は 10^6 とみてよいから

$$10^7 \times \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{23025849.8} = 10^6$$

である．$k = \log_e 10$ は 1 桁違う対数を表わしていた．

[33] 使用されている文字に違いがあるが，式は次のものである．

$$b^z = 1 + \frac{kz}{1} \log_a b + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} (\log_a b)^2 + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\log_a b)^3 + \frac{k^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\log_a b)^4 + \cdots \tag{5.8}$$

であるから，

$$a^y = \left(1 + \frac{y \log_e a}{i}\right)^i \tag{11.4}$$

となる．さらに，双曲線対数にたいして，

$$\log_e(1+x) = i\Bigl((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\Bigr) \tag{11.5}$$

という等式が得られる．

(11.3) 式は (11.1) 式を冪表示したもの，(11.4) 式は (11.2) 式を冪表示したものである．(11.5) 式は (6.7) 式で $k = 1$ とおいたものである．自然対数の冪表示はここが初めてということになる．また，任意の指数関数の冪表示もここがはじめてである．

まず，3 つの式の移行を見ておこう．7 章の展開の重要な点は冪から作った指数関数を逆転することによって対数関数を見直すことだった．

指数関数 (11.3) 式に $z = y \log_e a$ が導入されることによって (11.4) 式となる．これは級数表示の (11.1) 式から (11.2) 式へと同じである．$\log_e a$ の導入によって，対数関数への逆転の契機を内に含み，(11.4) 式は指数関数 (11.3) 式と自然対数 (11.5) 式の「境界」に位置しているのである．オイラーは指数関数の冪表示と対数関数の冪表示を並べているだけで，その移行は示していないが，付録 2 で示したような経緯があると推察するのである．

(11.4) 式の i 乗根をとって変形していくと，指数関数の形に内在する「双曲線（自然）対数」$\log_e a$ が外に出て来て，自然対数の冪表示 (11.5) 式が導かれるのである．これを次に示す．

i を無限大数とすれば，冪 $\left(1 + \frac{y \log_e a}{i}\right)^i$ の値は,「1 よりも大きい任意の数」に到達する．そこで

$$\left(1 + \frac{y \log_e a}{i}\right)^i = 1 + x \tag{11.6}$$

とおく．(　　) 内は

$$1 + \frac{y \log_e a}{i} = 1 + \frac{\log_e a^y}{i}$$

だから，(11.4) 式は

$$a^y = \left(1 + \frac{\log_e a^y}{i}\right)^i$$

である．(11.6) 式より，a^y を $1 + x$ に置き換えると

$$1 + x = \left(1 + \frac{\log_e(1+x)}{i}\right)^i$$

となる．両辺を入れ替えて，i 乗根をとると

$$1 + \frac{\log_e(1+x)}{i} = (1+x)^{\frac{1}{i}}$$

となる．1 を移項し，両辺を i 倍すると

$$\log_e(1+x) = i\Bigl((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\Bigr)$$

となる．
これで，(11.4) 式から (11.5) 式への移行が示された．

まとめれば，次のような移行である[34]．

$$e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i \longrightarrow a^y = \left(1+\frac{y\log_e a}{i}\right)^i \longrightarrow \log_e(1+x) = i\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right)$$

冪から作られた指数関数を逆転して対数関数を導く過程において，(11.4) 式は「境界」の役割を担っているのである．

次に，この式を指数関数 a^z の十全な表現であるという観点から取り上げる．最初と最後をつないでみるのである．最初というのは冪から作られた指数関数 a^z のことである（115 節）．

$$a^z = \left(1+\frac{kz}{i}\right)^i. \tag{11.7}$$

最後というのはネイピア数 e の導入によって定式化された

$$k = \log_e a$$

のことである[35]（124 節）．
(11.7) 式に直接，いいかえれば途中を飛ばして，強調すれば (11.3) 式を経由しないで，$k=\log_e a$ を代入したものとして (11.4) 式をとらえるのである[36]．

$$a^z = \left(1+\frac{kz}{i}\right)^i \longrightarrow a^z = \left(1+\frac{z\log_e a}{i}\right)^i$$

$k=\log_e a$ を代入した式

$$a^z = \left(1+\frac{z\log_e a}{i}\right)^i$$

において，$a=e$ とすれば

$$e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$$

になる．i 乗根をとっていけば

$$\log_e z = i(z^{\frac{1}{i}}-1)$$

となる．指数関数と対数関数の「境界」の (11.4) 式において，対数部分（$\log_e a$）を捨象すれば (11.3) 式が出て来る．対数部分（$\log_e a$）を外に取り出せば (11.5) 式が導かれる．この点から，(11.4) 式を 7 章の最高の数学的達成と見るのである．(11.3) 式でもなく (11.5) 式でもなく，(11.4) 式がネイピア数 e の導入の意義を十全

[34] これは付録 2 で示した対数の冪表示の導出を，e を導入した後で繰り返したものである．

$$a^z = \left(1+\frac{kz}{i}\right)^i \longrightarrow b^z = \left(1+\frac{kz\log_a b}{i}\right)^i \longrightarrow \log_a(1+x) = \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right)$$

[35] 対数の冪表示式 (11.5) 式の $1+x$ を a に置き換えると，$\log_e a = i(a^{\frac{1}{i}}-1)$ となり，$k=\log_e a$ の冪表示が与えられる．
[36] 使用する文字を z で揃える

に示していると考えるのである．

とはいえ，(11.3) 式と (11.5) 式，それぞれ単独の効力は大きいのである．指数と対数は次の 8 章「円から生じる超越量」において，虚の指数と虚の対数となって，三角関数と関連していく．そのとき，指数・対数と三角関数を結びつける中心に位置しているのが「冪表示」である．(11.3) 式は円弧の余弦と正弦に関係し，いわゆるオイラーの公式[37]を支える．(11.5) 式は円弧それ自体と関係し, いわゆる虚数の対数公式[38]を支える．また，この式は対数の無限多価性の基礎になっている．

これで『オイラーの無限解析』7 章のすべての式を取り上げ，読んだことになる．

12 おわりに

オイラーの関心は指数関数ではなく対数関数だった．そして対数の冪表示はオイラーが最も関心を持っていたものである．しかし，これは現代では見られなくなっている[39]．オイラー以降，顕著になったのは，指数関数が優位になったことだろう．現代では対数関数 (11.5) 式より指数関数 (11.3) 式が解析学の中心位置するようになっている．オイラー自身の意図を越えて，指数関数は成長していったのである．

(11.4) 式を次のように変形してみよう．

$$a^y = \left(1 + \frac{y \log_e a}{i}\right)^i = \left(1 + \frac{(y \log_e a)}{i}\right)^i = e^{y \log_e a}$$

$a^y = e^{y\log_e a}$ である．これはなじみのある式である．しかし，これでは対数の冪表示への過程は閉ざされてしまうのである．$\log_e a$ は冪 $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$ の形を捨て e^z の形に入ることによって，指数関数の成長を支えることになったのである．

この論考は 1728 年の e の導入から始めた．そこにもどろう．

対数と指数の起点を考えて

$$\frac{a^\omega - 1}{\omega} = k$$

とおいた．これをオイラーの遡行（アブダクション）と考えたのである．$k = \log_e a$ とわかったが，これをオイラーの無限解析の手法，無限小数 ω，無限大数 i を使って，$k = \log_e a$ となることを示してみよう．z を有限値とすれば，$\omega = \frac{z}{i}$ だった．$z = 1$ とすると，$\omega = \frac{1}{i}$ である．

$$k = \frac{a^\omega - 1}{\omega} = \frac{a^{\frac{1}{i}} - 1}{\frac{1}{i}} = i(a^{\frac{1}{i}} - 1) = \log_e a.$$

オイラーは e^z を包み込む指数関数 a^z を求めた．そして，$\log_e a$ を含む究極の形を提示した．その流れは次のようになるだろう．

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i \longrightarrow a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i \longrightarrow a^z = \left(1 + \frac{z \log_e a}{i}\right)^i = e^{z \log_e a}$$

ここに冪から出発して指数関数を作り上げたオイラーの歩みを集約できるのではないかと思う．

---

[37] $e^{+z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1} \sin z$.

[38] $z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}} \log \dfrac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$.

[39] 志賀浩二は $nx^{\frac{1}{n}} - n = \log_e x$ であることを説明するさい,「この式は見なれないかもしれないので，現在流に導いてみると,」といい，$(a^t)' = a^t \log_e a$ を考え，この式で $t = 0$ とすればよいと言っている [4]，p.208．対数の冪表示がなくても，指数関数の微分で用が足りるようになっているのである．

（了）

13　付録 1　自然対数の「底」の原型

連続複利の形を「底」にみいだしたのは，ネイピアやビュルギの対数の検討が基礎になっているだろう．
ネイピアとビュルギの二人は「底」という考えを知らない．もっぱら等比数列と等差数列の対応という考えで対数を考えた．
ネイピアは 1 より小さい比を考えた．初項 10^7, 公比 $1-1/10^7$, 一般項

$$x = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

である．ビュルギは 1 より大きい比を考えた．初項 10^8, 公比 $1+1/10^4$, 一般項

$$x = 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^y$$

である．
しかし，次のように変形していくと,「底」が隠れていたことがわかる．ここで二人の対数の「底」を導いてみよう．

1 より大きい比のほうが見やすいので，まずビュルギの対数の「底」を導く．

$$x = 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^y.$$

両辺を 10^8 で割ると

$$\frac{x}{10^8} = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^y.$$

(　) の内と外を 10^4 で調整すると

$$\frac{x}{10^8} = \left(\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right)^{\frac{y}{10^4}}$$

となる．これは指数の形だが，　対数の形にすると

$$\frac{y}{10^4} = \log_{\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}} \frac{x}{10^8}$$

となる．

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$$

は,

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$$

の形をしている．これは自然対数の底 e の原型である．

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2.7181459\cdots$$

で，ほぼ $e = 2.7182818\cdots$ である．

ネイピアの場合は

$$x = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

が

$$\frac{x}{10^7} = \left(\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right)^{\frac{y}{10^7}}$$

となる[40]．これを対数の形にすると

$$\frac{y}{10^7} = \log_{\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}} \frac{x}{10^7}$$

となり，底

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

は

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^i = \left(1 + \frac{(-1)}{i}\right)^i = e^{-1}$$

の形になる．ネイピアの対数の底は $\dfrac{1}{e}$ だったことになる．

こうしてみると，対数を小刻みに並べていくために，1 に極めて近い公比を採用する必要があったこと，そして小数表記が未確立だったので精巧な数値を求めるために，当時の三角表の表記を踏襲して，初項を大きな数に設定したことが，連続複利の形を準備していたことがわかる．

そして,「底」の概念は，小数表記が徐々に確立し，初項が 1 と設定され，真数や対数が小数表記されることによって現れてきたといえる．

14　付録 2　対数の冪表示の導出　別解

任意の指数関数 b^z には対数 $\log_a b$ が内在する. この表示に指数関数と対数関数の「境界」を見ることができる．この $\log_a b$ を式の外に出すという観点から，対数関数の冪表示を導いてみよう．(5.8) 式を冪表示したものが

$$b^z = \left(1 + \frac{kz\log_a b}{i}\right)^i \tag{14.1}$$

である．これを出発点とする．

i を無限大数とすれば，冪 $\left(1 + \dfrac{kz\log_a b}{i}\right)^i$ の値は,「1 よりも大きい任意の数」に到達する．そこで

$$\left(1 + \frac{kz\log_a b}{i}\right)^i = 1 + x \tag{14.2}$$

とおく．(　　) の中に着目すると

$$1 + \frac{kz\log_a b}{i} = 1 + \frac{k\log_a b^z}{i} \tag{14.3}$$

[40] これは，x，y（ネイピア対数表の数値）を 10^7 で割ったもの（小数点の位置を 7 桁左へずらしたもの）の関係式である．付録 4「ネイピア対数の定義とネイピア数 e の導出」参照.

である．したがって，(14.1) 式は

$$b^z = \left(1 + \frac{k \log_a b^z}{i}\right)^i$$

となる．したがって，(14.2) 式より，b^z を $1+x$ に置き換えると

$$1 + x = \left(1 + \frac{k \log_a (1+x)}{i}\right)^i$$

となる．ここで両辺を入れ替えて，$1/i$ 乗する（i 乗根をとる）と

$$1 + \frac{k \log_a (1+x)}{i} = (1+x)^{\frac{1}{i}}$$

である．1 を移項すると

$$\frac{k \log_a (1+x)}{i} = (1+x)^{\frac{1}{i}} - 1$$

となり，両辺を i/k 倍すると

$$\log_a (1+x) = \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

となる．

15　付録 3　ブリックス常用対数における $1/k = 1/\log_e a$

ブリッグスの方には $1/k = 0.43429\cdots$ が出ている．どんなふうに出て来るのかを見ておこう[41]．

ブリッグスの対数表は 1 と 10 の「連続的（幾何）平均」という手法で作られている．10 の平方根，その平方根，そしてまたその平方根と，次々と計算して，54 回続ける．この値はだんだん 1 に近づいていく．真数の方は

$$10,\ 10^{1/2},\ 10^{1/2^2},\ 10^{1/2^3},\quad \cdots \quad,\ 10^{1/2^{53}},\ 10^{1/2^{54}}$$

となる．対数の方は，平方根の対数は 1/2 なので，1/ 2 の累乗が並んでいく．

$$1,\ 1/2,\ 1/2^2,\ 1/2^2,\quad \cdots \quad,\ 1/2^{53},\ 1/2^{54}$$

ブリッグスは表の後ろの方に規則性を発見する．

後ろの 3 つだけ表を取り出してみると，真数は

$$\begin{aligned}
10^{1/2^{52}} &= 1.0000, 00000, 00000, 05112, 76597, 28012.947 = 1 + \varepsilon_{52} \\
10^{1/2^{53}} &= 1.0000, 00000, 00000, 02556, 38298, 64006, 470 = 1 + \varepsilon_{53} \\
10^{1/2^{54}} &= 1.0000, 00000, 00000, 01278, 19149, 32003, 235 = 1 + \varepsilon_{54}
\end{aligned}$$

である．対数は

$$\begin{aligned}
1/2^{52} &= 2.2204, 46049, 25031, 30808, 47263 \times 10^{-16} = L_{52} \\
1/2^{53} &= 1.1102, 23024, 62515, 65404, 23631 \times 10^{-16} = L_{53} \\
1/2^{54} &= 0.5551, 11512, 31257, 82702, 11815 \times 10^{-16} = L_{54}
\end{aligned}$$

41『小数と対数の発見』[5] 第 9 章，pp.221–225 を参照する．

である．注意すれば，どちらも上から下にそれぞれ値が半分になっていることがわかる．

$$\varepsilon_{52} : \varepsilon_{53} : \varepsilon_{54} = 4 : 2 : 1$$
$$L_{52} : L_{53} : L_{54} = 4 : 2 : 1$$

そこでブリッグスは，$\log_{10} x = \log_{10}(1+\varepsilon) = L$ は $(x-1) = \varepsilon$ に比例していると推測した[42]．

$$\log_{10} x = \log_{10}(1+\varepsilon) = c\varepsilon$$

そして，c（比例定数）を L_{54}/ε_{54} から求めた．これが $0.43429\cdots$ である．

$$c = \frac{0.5551115123125782\cdots}{1.2781914932003235\cdots} = 0.434294481903251804$$

これは非常に小さい数（10^{-16} 以下）の対数を求めるときに威力を発揮した．その数（ε）にこの数字を乗ずれば正確な対数が求まるからである．ブリッグスは黄金律と呼んだ．

$$\log_{10} x = \log_{10}(1+\varepsilon) = 0.43429448\cdots \times \varepsilon \tag{15.1}$$

が黄金律である．

比例定数の計算は元をたどれば

$$\frac{1/2^{54}}{10^{1/2^{54}} - 1}$$

である．これを

$$\frac{1}{2^{54}(10^{1/2^{54}} - 1)} \tag{15.2}$$

と表示し，分母に着目してみよう．2^{54} は非常に大きな数だから，無限大数 i とおくと，(15.2) の分母は

$$i\left(10^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

である．これは自然対数の冪表示 (11.5) 式より，$\log_e 10$ である．したがって，(15.2) は

$$\frac{1}{\log_e 10} = \log_{10} e$$

である．したがって

$$0.434294481903251804 = \log_{10} e$$

となる．

ヴィンセントが直角双曲線の面積は横座標の対数となっていることを指摘したのは，1630 年頃だといわれている．ブリックスの『対数算術』は 1624 年だから，そのころはまだ自然対数はなかった．1668 年，メルカトルは自然対数から常用対数への変換に 0.43429 をかければよいと述べた．この頃には，自然対数と常用対数は両立していたようである．この指摘は，ブリッグスの黄金律，(15.1) 式の単に微小な数値だった ε を自然対数 $\log_e(1+\varepsilon)$ に置き換えたものとみることができる．

$$\log_{10} x = \log_{10}(1+\varepsilon) = 0.43429448\cdots \times \log_e(1+\varepsilon)$$

[42] $\log_e(1+\varepsilon) = \varepsilon$ は自然対数の性質だから，常用対数表に隠されている自然対数に接触したことになる．

ネイピアの対数表では自然指数の冪表示

$$\left(1-\frac{1}{i}\right)^{i}$$

に起因して

$$\log_{\frac{1}{e}} 10 = -\log_e 10$$

として $k = 2.30258\cdots$ が現れていた．

これに対して，ブリッグスの対数表では，自然対数の冪表示

$$i\left(10^{\frac{1}{i}}-1\right)$$

に起因して

$$\frac{1}{\log_e 10} = \log_{10} e$$

として $1/k = 0.43429\cdots$ が現れていたのである．

16　付録 4　ネイピア対数の定義とネイピア数 e の導出

16.1　ネイピア対数の定義の導出

ネイピアの作った対数表は正弦 $10^7 \sin\theta$ の 1 分刻みの表である．正弦 $\sin\theta$ は $90°$ から $0°$ へ動くとき，1 から 0 となる．ネイピアは 10^7 から 0 へと減少していく等比数列を考えた．

$$x = 10^7 \sin\theta = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{y}.$$

ネイピアの対数の特徴は，等比数列と等差数列が数直線上の点の運動として表象されたことである．ネイピアは等比数列と等差数列を，2 つの数直線（1 つの線分と 1 つの半直線）上の点の運動と対応させた．等比数列は一定の割合で減少していく線分上の運動として，等差数列は一定の速さで進む半直線上の点の運動として捉えたのである．数列は離散的な数である．他方，正弦は長さとして連続的な量である．数列を数直線上にプロットすることによって，数の拡大の端緒となった．

どのように等比数列と等差数列を 2 つの数直線に対応させたのか，ネイピアの対数の定義を導いてみよう[43]．

ここで初項 1，公比 $1-s$ の等比数列を考える．$s = 10^{-7}$ とする．この数列の一般項は

$$x = (1-s)^{y}$$

である．これはネイピアの等比数列の初項 10^7 を 1 としたものである．この式で比率は 1 以下（小数）だが，x，y はネイピア対数表の数値（整数）のままである．x，y には初項を 1 にした影響はない．これを次のように並べてみよう（図 1）．

---

[43]『数の大航海』[4] にも『小数と対数の発見』[5] にも，ネイピアの対数の定義がどのように発想されたかについて言及があるが，肝心の「等比数列と等差数列」との関係がはっきりしていない．

[4] に「幾何数列と算術数列との対応という最初のモティヴェィションを，数直線から数直線への対応という連続関数の概念の中に溶けこませることに成功した」(p.80) とある．しかし,「等比数列と等差数列の対応」がどのように「数直線から数直線への対応」になったのかは明確ではないようにみえる．

他方，[5] には「ネイピアが対数を，通常考えられるように幾何数列（等比数列）と算術数列（等差数列）の対応づけといった算術的考察からではなくて，数直線上の点の運動から幾何学的に構成した背景にはネイピア対数があくまで三角形の辺の長さで定義されていた，すなわち連続量にたいするものと考えられていたことによるのではないかと思われる」(p.131) とある．しかし，連続関数としての対数認識が強調されるあまり,「等比数列と等差数列の対応」と「数直線上の点の運動」は切り離されているようにみえる．

算術的な「等比数列と等差数列の対応」から幾何学的な「数直線上の点の運動」を構成する．

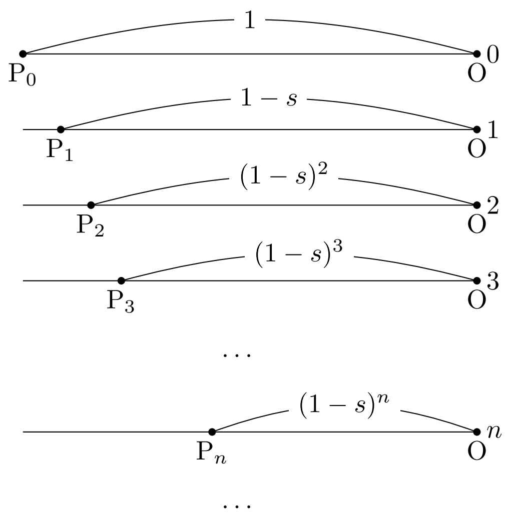

図 1: 等比数列と等差数列の対応（静止図）

これは定点 O からの距離として等比数列を見たものである．

$$x \qquad 1, \quad 1-s, \quad (1-s)^2, \quad (1-s)^3, \quad \ldots$$

が等比数列に対応し

$$y \qquad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

が等差数列を表わしている[44].

ここには時間的要素は含まれていない．等比数列（公比 $1-s$）と等差数列（公差 1）が空間的に配置してあるだけである．等比数列を生み出すのは公比 $1-s$ の幂指数 y である. これは 1 ずつ増加していく．ここに時間経過を想定してみよう．

最初の 1 単位で，O は 0 から 1 になる．$\mathrm{P_0O}$ は $\mathrm{P_1O}$ になる．

$$\begin{aligned}\mathrm{P_0P_1} &= \mathrm{P_0O} - \mathrm{P_1O}\\ &= 1-(1-s)\\ &= s\end{aligned}$$

次の 1 単位で，O は 1 から 2 になる．$\mathrm{P_1O}$ は $\mathrm{P_2O}$ になる．

$$\begin{aligned}\mathrm{P_1P_2} &= \mathrm{P_1O} - \mathrm{P_2O}\\ &= (1-s)-(1-s)^2\\ &= (1-s)(1-(1-s))\\ &= (1-s)s\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{P_0P_1} = s = 1\times s$ と考え，$\mathrm{P_1P_2} = (1-s)\times s$ と対応させると

1 単位進む時間間隔は $s = 10^{-7}$ で，速さは

$\mathrm{P_0P_1}$ では，$\mathrm{P_0O}$ の 1

$\mathrm{P_1P_2}$ では，$\mathrm{P_1O}$ の $(1-s)$

と考えれば，線分上の点 P を運動として整合的に把握できる．この考えを $\mathrm{P_2} \longrightarrow \mathrm{P_3}$ に適用してみると，こ

44 これはシュティーフェルの表示を稠密にしたものである．x は真数，y は対数である．ちなみに，ネイピアに指数表示はなく，公比は線分図で示されている．　S　R　Q　$\mathrm{QS}:\mathrm{QR} = 1 : 1-s$

こでは $\mathrm{P}_2\mathrm{O} = (1-s)^2$ の速さで，s 進み

$$(1-s)^2 s$$

だけ移動することになる．実際

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 &= \mathrm{P}_2\mathrm{O} - \mathrm{P}_3\mathrm{O} \\
&= (1-s)^2 - (1-s)^3 \\
&= (1-s)^2(1-(1-s)) \\
&= (1-s)^2 s
\end{aligned}$$

である．数列の移行に時間経過を想定する解釈が成り立つことがわかる．n 単位後ならば P_n は $(1-s)^n$ の速さで s 進むのである[45]．

図 2 は，図 1 の点 P と点 O の変化を 1 つの線分に並べたものである．この図においては $x(\mathrm{P})$ の変化は見える．しかし，$y(\mathrm{O})$ の変化は 1 点 O に重なり見えなくなっている．

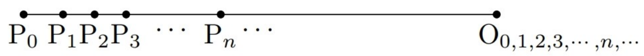

図 2: 線分上の等比数列と等差数列（点の集合）

y の変化を可視化できるように，半直線 O を始点を P_0 と揃えて（出発点として）追加し，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{O}$ 上の $\mathrm{P}_n\mathrm{O} = (1-s)^n$ と半直線 O 上の n を対応させたものが図 3 である[46]．矢印が対数を表わすことになる．

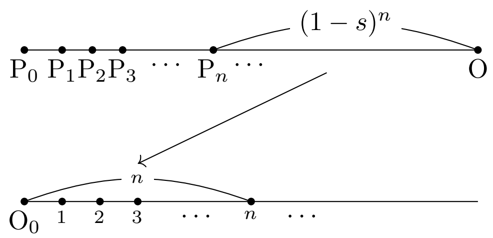

図 3: ネイピア対数の定義（離散的）

ネイピアは『構成（Construction）』（1619 年）で次のように説明している[47]．

1. 算術的に増加するとは，同一時間につねに同量だけ増加することである．
2. 幾何学的に減少するとは，同一時間に，最初は全量が，その後はそれぞれの残りが，常に同一の比率で減少することである．
3. したがって，定点に接近する幾何学的に運動する点は，その定点からの距離に比例した速度を有する．

[45] 時間の刻み 10^{-7} は初項を 1 にした影響である．10^7 の場合，この刻みは 1 である．なお，対数表の最初の 4 項とその対数を示せば，次のようになる（ネイピアは有効数字を多くするため，また誤差を吸収するため，10^7 を 1000000.0000000 と表記している）．真数，(速度)，対数の順で示す．[5]，p.165. 参照.

$x_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{O}$=10000000.0000000,	(1.0000000),	0
$x_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{O}$= 9999999.0000000,	(0.9999999),	1.00000005
$x_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{O}$= 9999998.0000001,	(0.9999998),	2.00000010
$x_3 = \mathrm{P}_3\mathrm{O}$= 9999997.0000003,	(0.9999997),	3.00000015

[46] これは [4] に示してある図 (p.87) を参考にして描いている．また，この図は [5] の図 5.5（ネイピア対数 $X = \mathrm{D}\ln x$ の図解，p.133）に対応している．

[47] [5]，pp.150–151 より引用.

まだ離散的だが，動きは次のように確認できる．

1. O は，つねに 1 ずつ増加する．
2. P は，最初は 1，その後は $1-s$ の比率で減少する．
3. P_n の速度は $(1-s)^n$ である．

この後にネイピアの対数の定義が続く．

図 3 は連続的な正弦を離散的な数列で表示したもので，実際の正弦の変化の近似である．正弦の長さの変化を数直線上の点の運動として見ていることから推察できるように，ネイピアは正弦もその対数も連続的なものと捉えていた．また，数直線上には整数だけではなく，整数と整数の間に，無限の数（小数）があることを見ていた[48]．山本義隆の表現を借りれば「数直線上のすべての点に対応する数のあることを直感的に理解していた」のである．

離散的な数列の対応を連続的な長さ（距離）の対応に置き換えたものが図 4 である[49]．ネイピアの説明は次のようである．

> 4．与えられた正弦の対数とは，半径〔全正弦〕が幾何学的に減少を開始したときの速度と終始同一の速度で，半径〔全正弦〕が与えられた正弦にまで減少するのと同じ時間の間に算術的に増加する量である．

「与えられた正弦の対数」とは $x \longrightarrow$ の矢印が示す y である.「半径〔全正弦〕」とは $\mathrm{P_0O}=1$,「与えられた正弦」とは $10^7\sin\theta$（図 3 では $(1-s)^n$，図 4 では x) である.「半径〔全正弦〕が幾何学的に減少を開始したときの速度」は 1 ,「半径〔全正弦〕が与えられた正弦にまで減少する（のと同じ）時間」は P_0 が P に移動する時間である.「同じ時間の間に算術的に増加する量」は $y=\mathrm{L_0L}$ である．

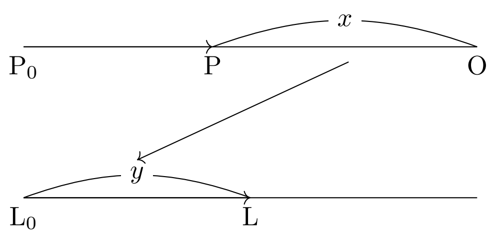

図 4: ネイピア対数の定義（連続的）

以上が，等比数列と等差数列の対応に時間を導入することによって，数直線上でなされたネイピア対数の定義の由来を推察したものである．対数 y の増加を時間の経過と対応させたことが跳躍点だった．

16.2　ネイピア数 e の導出

ネイピア以降，数が拡大され無限小数（実数）が現れてくる．無限級数の基礎が形成され，無限解析が始まった．離散的な段階で把握された 3 の「定点からの距離に比例した速度」は，連続的な段階では「どの瞬間においても位置に比例する速度」に変わる．

図 5 は，初速度 1 で運動を始めた点 P の t 経過したときの図である．x は t の関数である．点 P での速度は，「どの瞬間においても位置に比例する速度」であり

$$-\frac{dx}{dt}=x$$

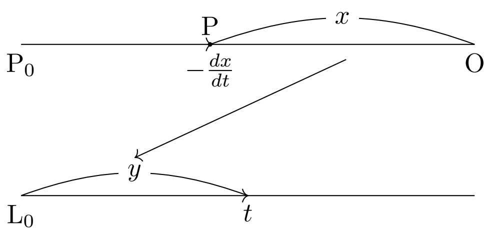

図 5: 実数上でのネイピア対数の定義（連続的）

である．$t=0$ のとき $x=1$ である．

この微分方程式を解くと

$$-\frac{dx}{x}=dt$$
$$-\int\frac{dx}{x}=\int dt$$
$$-\log_e x=t+C$$

$t=0$ のとき $x=1$ より $C=0$．したがって

$$-\log_e x=t$$
$$\log_e x^{-1}=t$$
$$\log_{\frac{1}{e}} x=t.$$

$y=t$ だから

$$y=\log_{\frac{1}{e}} x$$

である．これは実数上のネイピア対数である．

また

$$\log_{\frac{1}{e}} x=t \Longleftrightarrow e^{-t}=x$$

である．$x=e^{-t}$ は減衰していく指数関数を表わしている．

図 3 と図 4 の「定点からの距離に比例した速度」と図 5 の「どの瞬間においても位置に比例する速度」の間には，過渡的な段階があった[50]．図 3 に戻る．図 3 は

$$x=\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y$$

の表示だった[51]．この x，y はネイピア対数表の数値で，整数だった．P_n の速度は $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n$ だった．この表記を基礎にして，真数 x の速度の変化を 1 つの線分で表示する．対数の変化を数直線上の点の運動としてみるとき，対数の進行を時間 t の経過と対応させることができる．

$$x=\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^t$$

[48]「対数概念にとって最も重要な点は，整数間の演算としての乗法を加法に変換する規則を数学的に正確に記述するためには，無限小数—実数—必然的に現われてくることにある」[4]，p.79.

[49] これは [5] の図 6.3（ネイピア対数 $X=\mathrm{N}\ln x$ の定義，p151）に対応している．

[50] 山本義隆は図 4 と図 5 を区別していない [5]，pp.152–153．ネイピア対数はすでに自然対数と同じレベルで,「連続的な実数値」をとると想定されている．これは 1. ネイピア対数が数直線上の点の運動（連続的）に基づいていること、2. 数列の値（真数と対数）をネイピアが実数の近似値であることを自覚していたことが根拠となっている．しかし，これはネイピア対数の過大評価だろう．区別を示す．

[51] s を $\frac{1}{10^7}$ で表示.

である．P_t の速度を図 6 に示す．

右端 t の添字（下付き数字）1 は，対数（時間）が離散的に 1 ずつ増加していることを表わしている．対数は一定の速度で進んでいく．t_1 は時間が 1 を単位として進行していることを表わしている．

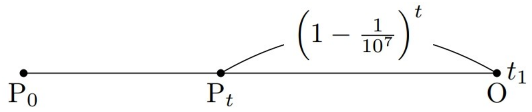

図 6: 対数が 1 ずつ増加するときの速度

さて，小数表記が確立していくにつれて，x，y が見直され，小数表記（小数点の位置が 7 桁左に移動する）されるようになった．$x/10^7$ と $y/10^7$ の関係が着目されるようになったのである．

付録 1 でみたように，この関係式は

$$\frac{x}{10^7}=\left(\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right)^{\frac{y}{10^7}}$$

である．

真数と対数を小数表記し，対数の進行を時間 t の経過と対応させるとき，数直線上の「定点からの距離に比例した速度」は図 7 のようになる．

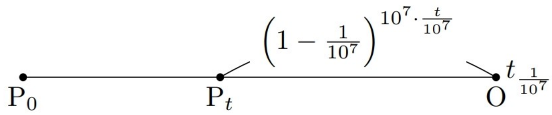

図 7: 対数が $\frac{1}{10^7}$ ずつ増加するときの速度

$t_{\frac{1}{10^7}}$ は時間が $\frac{1}{10^7}$ を単位として進行していることを表わしている．ここで「定点からの距離に比例した速度」の大きさ $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^t$ は変わらない．点 P_t の位置も同じである．違いは対数が進行していく刻みが $\frac{1}{10^7}$ になり，それに対応して真数の刻みも $\frac{1}{10^7}$ になっていることである．数直線上の点 P の稠密性が増加していることである．

ここで

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

は

$$\left(1-\frac{1}{i}\right)^i$$

の形である．$\left(1-\frac{1}{i}\right)^i$ という冪構造が，数直線上の点の運動の表示のなかに現れてきたのである[52]．

他方

$$\frac{1}{10^7}$$

は

$$\frac{1}{i}$$

[52] また，これは指数と対数の「底」である．「底」概念と冪構造は同時に現れたと思われる．

山本義隆はネイピア対数と自然対数を連結させるのは底 $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ であることを認識しているが（[5]，p.153)，「底」を単に「書き直し」のレベルで捉え，ネイピア対数（図 4）と自然対数（図 5）を区別する歴史上の出来事とは捉えていない．

の形である．

ここで，i を無限大数（$i \to \infty$）と考えると，$\frac{1}{i}$ は無限小数 ω（$\frac{1}{i} \to 0$）となり，t_ω は連続的な時間経過を表わすようになっていく．対数は連続的な半直線 $\mathrm{L_0L}$ 上に位置づけられたが，時間 t としても，それに対応するように連続的になっていったのである．また，真数の方も同じように線分 $\mathrm{P_0O}$ に対応するように連続的になり，$\left(1-\frac{1}{i}\right)^i$ は $\frac{1}{e}$ に接近していったのである．

離散的なネイピア対数の速度表示

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^t$$

は，連続的な速度表示

$$\left(\frac{1}{e}\right)^t = e^{-t}$$

になっていったが，その過程には，稠密だが，なお離散的な段階

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7\cdot\frac{t}{10^7}}$$

があった．そして，そこにオイラーが立っていたのである．

参考文献

[1] オイラー，高瀬正仁訳,『オイラーの無限解析』，海鳴社，2001

[2] 嶋喜一郎,「オイラーの公式—起承転結」(「数学・物理通信」10 巻 7 号，2020）

[3] 金重明,『世界は「e」でできている』，講談社，2021

[4] 志賀浩二,『数の大航海』，日本評論社， 1999

[5] 山本義隆,『小数と対数の発見』，日本評論社，2018

[6] 高瀬正仁,『無限解析のはじまり』，ちくま学芸文庫，2009

[7] ボイヤー,『数学の歴史』，朝倉書店，1984

[8] 高橋浩樹,『オイラー無限解析の源流』，現代数学社，2010