1　ネイピア対数を読み解く

1.1　ネイピア対数の定義を導く

ネイピアの試みは三角表にある数の演算に対して，シュティーフェルの方法（乗法を加法に対応させる）を適用することであった．当時，三角表の数は精密になっており，10^7 を半径としてとった場合，正弦表の精度は 7 桁になっていた．それに合わせて，ネイピアは対数表の精度も有効数字 7 桁を目標にした[1]．

整数（三角表の 7 桁の数）間の掛け算を足し算に変換する方法を正確に追究しようとしたとき，ネイピアは無限に続く数（無限小数，実数）の存在と直面することになった．ネイピアの作ろうとした対数表は正弦 $10^7 \sin\theta$ の 1 分刻みの表である．正弦 $\sin\theta$ は $90°$ から $0°$ へ動くとき，1 から 0 となる．ネイピアは 10^7 から 0 へと減少していく等比数列を考えた．

$$x = 10^7 \sin\theta = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y .$$

ネイピアは x を「自然的数」，y を最初「人工的数」，のちに「対数」と呼んだ[2]．

いま，初項 10^7，公比 $1 - \frac{1}{10^7}$ で進行していく数列の最初の 101 項を取り上げると，次のようになる[3]（表 1）．

$$\begin{array}{cr}
x_0 & 10000000.0000000 \\
 & 1.0000000 \\ \cline{2-2}
x_1 & 9999999.0000000 \\
 & 0.9999999 \\ \cline{2-2}
x_2 & 9999998.0000001 \\
 & 0.9999998 \\ \cline{2-2}
x_3 & 9999997.0000003 \\
 & 0.9999997 \\ \cline{2-2}
x_4 & 9999996.0000006 \\
\vdots & \vdots \\
x_{100} & 9999900.0004950
\end{array}$$

表 1

ここで y の列は整数（0,1,2,3,. . . ,）だが，x の項には無限に続いていくような小数が出てくる（近似でまるめてあるが）．このうち ネイピアの関心は 7 桁の整数（三角表の表示）である．

例えば x_{100}=9999900.0004950 である．これに近い整数 9999900 の y の値を計算してみると，x_0=10000000.0000000 と x_{100}=9999900.0004950 の線形補間より，100.000495 となる．[4]

これは

$$9999900 = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{100.000495}$$

ということだが，y の値の方にも無限に続く小数が出現してくる．ネイピアが 直面したものは 志賀の表現を借りていえば，「対数概念にとって最も重要な点は，整数間の演算としての乗法を加法に変換する規則を数学的に正確に記述するためには，無限小数—実数—が必然的に現れてくることにある」[5]．ネイピアは自然的数 x にも人工的数 y にも無限に続く小数の出現に直面したのである．

---

[1] これを補間を通して保持するには 11 桁の数の計算が必要になった．

[2] 与えられた正弦を「自然的数」と呼び，そのかけ算を工夫して足し算で可能にする数を「人工的数」（artificial number）と呼ぶのは妥当な命名だろう．「対数」（logarithm）は logos（論理）と arithmos（数）から創案されている．「対数」（logarithm）が当初持っていたのは，正弦の計算をしやすくするため「論理的に作った数」という意味だったろう．「対数」は「真数」（自然的数）と対（つい）になっていく．

[3] [1]p154,[2]p156 参照

[4] $\frac{100}{100000000-999900.000495} \times (10000000 - 9999900) = 100 \times \frac{100}{99.9996505} = 100.000495$

[5] [1]p79

数と数の間に見え隠れする無限小数をどのように対処すればいいのか，ネイピアは数ではなく量に着目する．

当時，正弦は比というよりは半弦の長さとして捉えられていた．だから，正弦を数字（数）ではなく長さ（量）として見ることはネイピアの理解の基礎にあったのである．正弦の変化は三角表では離散的だが，正弦自体は長さとして連続的に変化していくだろう．正弦（自然的数）に対応する人工的数（対数）も同じである．この 2 つは数としては離散的に変化していくが，量としては連続的に変化していく．数は近似値にほかならない．これを正確に保存するには数直線上の点の動きとして表象するのが妥当だと思われた．

志賀浩二はネイピアの対数の定義には「実数概念や関数概念へ向けての最初の胎動がある」と言っている[6]．実数への胎動は等比数列と等差数列を「数直線」に位置づけることに現れ，関数への胎動は等比数列と等差数列の「対応」に現れているといえるだろう．志賀はネイピアが「幾何数列と算術数列との対応という最初のモティヴェィションを，数直線から数直線への対応という連続関数の概念の中に溶けこませることに成功した」と述べている[7]．ここに着目する．

まず，初項 1，公比 $1-s$ の等比数列を考えてみよう．$s = 10^{-7}$ とする．この数列の一般項は

$$x = (1-s)^y$$

である．これはネイピアの等比数列の初項 10^7 を 1 としたものである[8]．この式で正弦の値 (x) は 1 以下（小数）になるが，y は整数のままである．y には初項を 1 にした影響はない．この数列を次のように並べてみよう（図 1）．

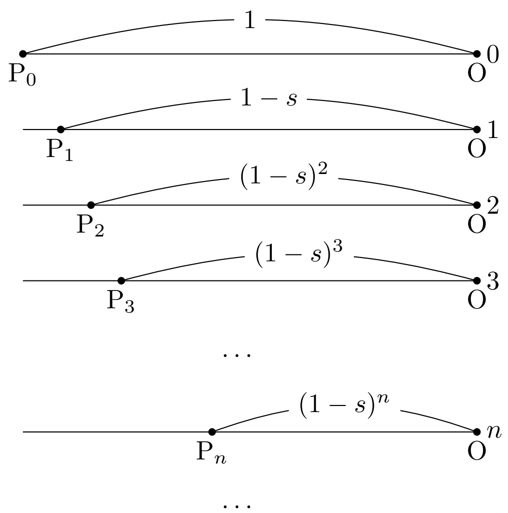

図 1: 等比数列と等差数列の対応（静止図）

等比数列の項は線分として並置されている．これは定点 O からの距離として等比数列を見たものである．

$$x \qquad 1, \quad 1-s, \quad (1-s)^2, \quad (1-s)^3, \quad \ldots$$

が等比数列に対応する．また，

$$y \qquad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

が等差数列を表わしている．

これはシュティーフルの表示（初項 1，公比 2 の等比数列）を稠密にしたものである.「乗法を加法に変換する原理」は保存されている．例えば $1-s$ と $(1-s)^2$ の積を求めるとき，直接 $(1-s)(1-s)^2 = (1-s)^3$ と求

[6] [1]p87

[7] [1]p80

[8] これは線分の表示を簡潔にするためだが，真数の小数表示を先取りしていることになる．

めるのではなく，$1+2=3$ と加法を媒介にして 3 と対応する $(1-s)^3$ として求まるのである．ここには時間的要素は含まれていない．等比数列（公比 $1-s$）と等差数列（公差 1）が空間的に配置してあるだけである．等比数列を生み出すのは公比 $1-s$ の冪指数 y である. これは 1 ずつ増加していく.

図 1 の線分（等比数列の項）を 1 つの線分の上に並べてみると次のようになる（図 2）.

図 2: 線分上の等比数列と等差数列（点の集合）

点 P はパラパラ漫画のように動き始めるように見える．1 ずつ増加していく冪指数[9]y に時間の経過を想定してみよう.

最初の 1 単位で，O は 0 から 1 になる．$\mathrm{P}_0\mathrm{O}$ は $\mathrm{P}_1\mathrm{O}$ になる．

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 &= \mathrm{P}_0\mathrm{O} - \mathrm{P}_1\mathrm{O}\\ &= 1-(1-s)\\ &= s\end{aligned}$$

次の 1 単位で，O は 1 から 2 になる．$\mathrm{P}_1\mathrm{O}$ は $\mathrm{P}_2\mathrm{O}$ になる．

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 &= \mathrm{P}_1\mathrm{O} - \mathrm{P}_2\mathrm{O}\\ &= (1-s)-(1-s)^2\\ &= (1-s)(1-(1-s))\\ &= (1-s)s\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 = s = 1\times s$ と考え，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = (1-s)\times s$ と対応させると

1 単位進む時間間隔は $s = 10^{-7}$ で，速さは

$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ では，$\mathrm{P}_0\mathrm{O}$ の 1

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ では，$\mathrm{P}_1\mathrm{O}$ の $(1-s)$

と考えれば，線分上の点 P を運動として整合的に把握できる．この考えを $\mathrm{P}_2 \longrightarrow \mathrm{P}_3$ に適用してみると，ここでは $\mathrm{P}_2\mathrm{O} = (1-s)^2$ の速さで，s 進み

$$(1-s)^2 s$$

だけ移動することになる．実際

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 &= \mathrm{P}_2\mathrm{O} - \mathrm{P}_3\mathrm{O}\\ &= (1-s)^2-(1-s)^3\\ &= (1-s)^2(1-(1-s))\\ &= (1-s)^2 s\end{aligned}$$

である．数列の移行に時間経過を想定する解釈が成り立つことがわかる．n 単位後ならば P_n は $(1-s)^n$ の速さで s 進むのである[10].

---

[9]当時，指数という概念はない．ここでは等比数列の項順である．

[10]時間の刻み 10^{-7} は初項を 1 にした影響である．10^7 の場合，この刻みは 1 である．なお，対数表の最初の 4 項とその対数を示せば，次のようになる．ネイピアは有効数字を多くするため，また誤差を吸収するため，10^7 を 1000000.0000000 と表記している．この表記に山本義隆はネイピアがレギオモンタヌスを越えているとみている．真数，(速度)，対数の順で示す．[2]，p.165. 参照.

$x_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{O}$=10000000.0000000,　(1.0000000),　0
$x_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{O}$= 9999999.0000000,　(0.9999999),　1.00000005
$x_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{O}$= 9999998.0000001,　(0.9999998),　2.00000010
$x_3 = \mathrm{P}_3\mathrm{O}$= 9999997.0000003,　(0.9999997),　3.00000015

y の変化を可視化できるように，半直線 O を始点を P_0 と揃えて（出発点として）追加し，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{O}$ 上の $\mathrm{P}_n\mathrm{O} = (1-s)^n$ と半直線 O 上の n を対応させてみよう．それが図 3 である[11]．矢印が対数を表わしている．これが最初の関数といえるだろう．

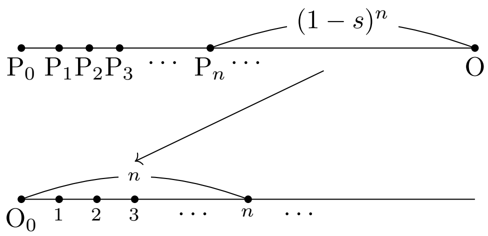

図 3: ネイピア対数の定義（離散的）

ネイピアは『構成（Construction）』（1619 年）で次のように説明している[12]．

1. 算術的に増加するとは，同一時間につねに同量だけ増加することである．
2. 幾何学的に減少するとは，同一時間に，最初は全量が，その後はそれぞれの残りが，常に同一の比率で減少することである．
3. したがって，定点に接近する幾何学的に運動する点は，その定点からの距離に比例した速度を有する．

まだ離散的だが，動きは次のように確認できる．

1. O は，つねに 1 ずつ増加する．
2. P は，最初は 1，その後は $1-s$ の比率で減少する．
3. P_n の速度は $(1-s)^n$ である．

図 3 は連続的な正弦の変化を離散的な数列で表示したものである．正弦は線分の上にプロットした点を離散的に動くのではない．ネイピアは正弦の値は線分上を連続的に動くことを見抜いていた．ネイピアは，線分上のある 1 点に着目しその速さを表現しようとしていた．次のような表現がある．

「ある運動よりも，一層ゆっくりした運動も，また 一層速い運動も与えられ得るということを知るときは，そのことからその運動に等しい速さをもつ運動も存在するということが結論できる（それをわれわれは速くも遅くもない運動という）.」[13]

これはある区間（例えば $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$）の間のある 1 点に注目して，その瞬間の速さを表現しようとしたもののように見える．着目する $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の間のある 1 点において，この速さは，P_1 における「一層速い運動」と P_2 における「一層ゆっくりした運動」に対して,「その運動に等しい速さをもつ運動」であり「速くも遅くもない運動」と捉えているように見える．

正弦の動きは連続的である．自然的数も人工的数（対数）も連続的である．離散的な数列の対応を連続的な長さ（距離）の対応に置き換えたものが図 4 である[14]．ネイピアの説明は次のようである.[15]

[11] これは [1] に示してある図 (p.87) を参考にして描いている．また，この図は [2] の図 5.5（ネイピア対数 $X = \mathrm{D}\ln x$ の図解，p.133）に対応している．

[12] [2]，pp.150–151 より引用．山本義隆によれば，没後に出版された『構成』の定義の方が,「連続関数としての対数」の理解が明確だという.『記述』（1614 年）では，定義 1 と定義 2 は次のようになっている．1. 直線〔半直線〕が一様に伸張するといわれるのは，その直線を描く点が同一時間に同一の距離を進む場合である．2. 直線〔線分〕が比例的に短かくなるように縮小すると言われるのは，その直線を記述する点が同一時間に切り取る部分が，そこからその部分が切り取られる直線〔線分の長さ〕とつねに一定の比にある場合である．[2]，p129　参照.

[13] [1]，p.93 より引用.『記述（Description』（1614 年）の定義 5.

[14] これは [2] の図 6.3（ネイピア対数 $X = \mathrm{N}\ln x$ の定義，p151）に対応している．

[15] [2]，p129 『記述』では定義 6 として次のようになっている.「任意の正弦の対数は，全正弦を表す〔線分〕直線がその正弦に比例して縮小するとき，その間に一様に伸張する直線〔の長さ〕をきわめて近く表現するところの数である．ただし，双方の運動が同時におなじ速度で始まるとする.」[2]，p132

４．与えられた正弦の対数とは，半径〔全正弦〕が幾何学的に減少を開始したときの速度と終始同一の速度で，半径〔全正弦〕が与えられた正弦にまで減少するのと同じ時間の間に算術的に増加する量である．

ここで「量」という表現は，ネイピアにおいて,「数」（離散的整数）と対比して使われる連続量を指示する表現である[16].

「与えられた正弦の対数」とは $x \longrightarrow$ の矢印が示す y である.「半径〔全正弦〕」とは $\mathrm{P_0O} = 1$,「与えられた正弦」とは $10^7 \sin\theta$（図 3 では $(1-s)^n$，図 4 では x) である.「半径〔全正弦〕が幾何学的に減少を開始したときの速度」は 1 ,「半径〔全正弦〕が与えられた正弦にまで減少する（のと同じ）時間」は $\mathrm{P_0}$ が P に移動する時間である.「同じ時間の間に算術的に増加する量」は $y = \mathrm{L_0L}$ である.

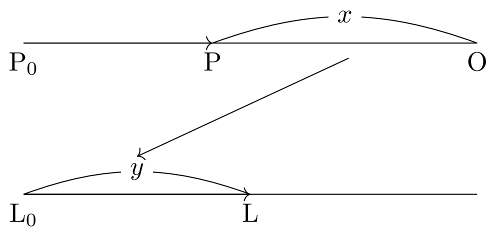

図 4: ネイピア対数の定義（連続的）

与えられた正弦（等比数列）は速さが一定の割合で減少していく線分上の運動として，その対数（等差数列）は一定の速さで進む半直線上の点の運動として捉えられた．ネイピアは「等比数列と等差数列との対応」という最初のモチベーションを「数直線から数直線への対応という連続関数の概念の中」に内在させたのである．

1.2　ネイピア数 e が現れる

ネイピアは，数列に出現した無限小数を包摂するため，等比数列と等差数列の各項を線分上に位置づけた．そしてその数列の変化を「速さ」の変化として捉えた．速さもまた連続的に変化する量である．速さの概念には距離と時間が必要である．距離の変化に対しては等比数列の位置（長さ，真数 x）の変化が着目された．時間の経過に対しては等差数列の項（対数 y）の規則的な増加が対応した.

図 3 に戻る．図 3 はネイピアの関係式

$$x = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y.$$

において，初項を 1 におきかえた

$$x = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

の表示だった[17]．x の方は小数表記を先取りした形だったが，y は整数のままだった．P_n の速度は $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ である．この表記を基礎にして，真数 x の速度の変化を 1 つの線分で表示する．対数の変化は数直線（半直線）上の点の運動として分離されたが，これを結合する．そして，このとき y を t に置き換える．対数の進行は時間 t の経過と対応させることができる.

$$x = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^t$$

[16] [2]，pp.149–150. 参照.
[17] s を $\frac{1}{10^7}$ で表示.

である．P_t の速度を図 5 に示す．

右端 t の添字（下付き数字）1 は，対数（時間）が離散的に 1 ずつ増加していることを表わしている．対数は一定の速度で進んでいく．t_1 は時間が 1 を単位として進行していることを表わしている．ネイピアの 4 の定義において対数（時間）は連続的になっているが，直観的に展望されているだけで実質は離散的である．

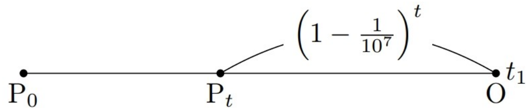

図 5: 対数 t が 1 ずつ増加するときの速度

さて，小数が普及するにつれて，ネイピアが想定した等比数列

$$x = 10^7\Big(1-\frac{1}{10^7}\Big)^y$$

の x，y が見直され，小数表記（小数点の位置が 7 桁左に移動する）されるようになった．$x/10^7$ と $y/10^7$ の関係が着目されるようになってきたのである．

その関係式は

$$\frac{x}{10^7} = \left(\Big(1-\frac{1}{10^7}\Big)^{10^7}\right)^{\frac{y}{10^7}}$$

である.[18]

等比数列と等差数列の項の進行を小数表記し，そして対数（等差数列）の進行を時間 t の経過と対応させると，数直線（線分）上の「定点からの距離に比例した速度」は図 6 のようになる．

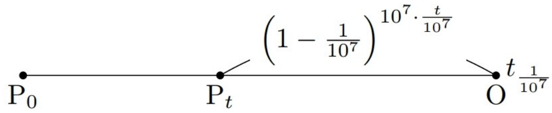

図 6: 対数 t が $\frac{1}{10^7}$ ずつ増加するときの速度

$t_{\frac{1}{10^7}}$ は時間が $\frac{1}{10^7}$ を単位として進行していることを表わしている．ここで「定点からの距離に比例した速度」の大きさ $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^t$ は変わらない．点 P_t の位置も同じである．

違いは対数が進行していく刻みが $\frac{1}{10^7}$ になり，それに対応して真数の刻みも $\frac{1}{10^7}$ になっていることである．数直線上の点 P の稠密性が増加していることである．そして，定数

$$\Big(1-\frac{1}{10^7}\Big)^{10^7}$$

が出現していることである[19]．

ここで

$$\Big(1-\frac{1}{10^7}\Big)^{10^7}$$

[18]ネイピアが想定した関係式から導ける．

[19]これは対数や指数の「底」として把握されていくもので，この大きさは

$$\Big(1-\frac{1}{10^7}\Big)^{10^7} = \frac{1}{2.718281964\ldots} = 0.36787922\ldots$$

程である（[2]，p.153 参照）．この値は $1/e$（e はネイピア数）にほぼ等しい．

は

$$\left(1-\frac{1}{i}\right)^i$$

の形である．$\left(1-\frac{1}{i}\right)^i$ という冪構造が，数直線上の点の運動の表示のなかに現れてきたのである．

他方

$$\frac{1}{10^7}$$

は

$$\frac{1}{i}$$

の形である．

ここで，i を無限大数（$i \to \infty$）と考えると，$\frac{1}{i}$ は無限小数 ω（$\frac{1}{i} \to 0$）となり[20]，t_ω は連続的な時間経過を表わすようになっていく．また，真数の方も同じように連続的になり，$\left(1-\frac{1}{i}\right)^i$ は $\frac{1}{e}$ に接近していく．ここに無限解析が可能になっていったのである．

離散的な段階で把握された図 3，連続性を展望した図 4 の「定点からの距離に比例した速度」は，連続的な段階では「どの瞬間においても位置に比例する速度」に変わる．

図 7 は，初速度 1 で運動を始めた点 P の t 経過したときの図である．x は t の関数である．点 P での速度は，「どの瞬間においても位置に比例する速度」であり

$$-\frac{dx}{dt} = x$$

である．$t=0$ のとき $x=1$ である．

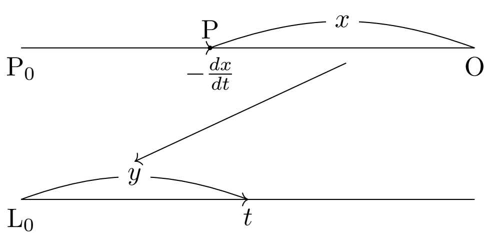

図 7: 実数上でのネイピア対数の定義（連続的）

この微分方程式を解くと

$$-\frac{dx}{x} = dt$$
$$-\int \frac{dx}{x} = \int dt$$
$$-\log_e x = t + C$$

$t=0$ のとき $x=1$ より $C=0$．したがって

$$-\log_e x = t$$
$$\log_e x^{-1} = t$$
$$\log_{\frac{1}{e}} x = t.$$

[20] i（無限大数），ω（無限小数）はオイラーの無限解析における用語である．

$y=t$ だから

$$y=\log_{\frac{1}{e}} x$$

である．これは実数上のネイピア対数である[21]．また

$$\log_{\frac{1}{e}} x = t \Longleftrightarrow e^{-t}=x$$

である．ここで

$$x=e^{-t}$$

は減衰していく指数関数を表わしている．

この関数は，ふりかえれば，ネイピアが想定した 10^7 から 0 へと減少していく離散的な等比数列

$$x=10^7\sin\theta=10^7\Big(1-\frac{1}{10^7}\Big)^y$$

が源なのである．

参考文献

[1] 志賀浩二,『数の大航海』，日本評論社， 1999

[2] 山本義隆,『小数と対数の発見』，日本評論社，2018

[21] ネイピア対数は底 $1/e$ の対数だったことがわかる．