オイラーの公式と弁証法

目 次

1　はじめに

オイラーの公式は数学で最も美しい式といわれている。たんに美しいだけでなく、実用的にもすぐれている。それは異なる種類の 2 つの関数、指数関数と三角関数を結びつけるもので、次のような式で表わされて

いる[1] 。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

遠山啓はこの式を「太平洋と大西洋を結ぶパナマ運河」と形容していた。また吉田武は「虚」と「実」、「円」と「三角」を結ぶ「不思議の環」と形容している。ファインマンは「jewelry(宝石)」とよんでいた。

この公式は 18 世紀にオイラーが導いたものである。異なる指数関数と三角関数が結ばれているので、この公式が作られた過程は弁証法と対応しているのではないかと思われた。ここで弁証法とはギリシアやヘーゲル、あるいはマルクス主義の弁証法ではなく、私が提起している弁証法[2]のことである。それは端的にいえば、2 つの「論理的なもの」[3]を選んで 1 つの「論理的なもの」にまとめる技を指している。『オイラーの無限解析』(レオンハルト・オイラー著/高瀬正仁訳/海鳴社)と『無限のなかの数学』(志賀浩二著/岩波新書)を参考にして、オイラーの公式が作られた過程を把握したいと思う。

.

2 指数関数と n 倍角の公式

「円から生じる超越量」(『オイラーの無限解析』第 8 章)において、極限を使って定義された指数関数と虚数単位 i を用いた n 倍角の公式は重要な契機となっている。式で表わせば、極限を使って定義された指数関数

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

と

虚数単位 i を用いた n 倍角の公式[4]

$$\left.\begin{aligned}\cos nz &= \frac{(\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n}{2}\\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

である。オイラーが出発点とした 2 つの「論理的なもの」は、極限を使って定義された指数関数と虚数単位 i を用いた n 倍角の公式とみることができる。

オイラーはこの 2 つの式をどのように関連させていったのだろうか。次のような図式[5]を使って説明してみよう。

$$\begin{array}{ccccccccc} c & \leftarrow & bi & + & a & \rightarrow & di \\ + & & \uparrow & & \downarrow & & + \\ bi & \leftarrow & c & + & di & \rightarrow & a \end{array}$$

[1] ここの x に π を代入して変形すると、起源がまったく異なる e(自然対数の底)と i(虚数単位)と π(円周率)と 1(乗法の単位元)と 0(加法の単位元)が $e^{i\pi}+1=0$ いう関係で結ばれる。

[2] 「ひらがな弁証法」https://mtbird.web.fc2.com/hiragana-dialectic.html。付録 4 を参照。

[3] 「論理的なもの」とは、何かについての認識が表現してあるものを指す。例えば、理論、命題、法則、公式、主張、規定、見解、意見などである。付録 3 を参照。

[4] オイラーがどのようにこの公式を導いたのかは付録 1 にまとめてある。

[5] 弁証法の場所的構造(ひろがるかたち)。「論理的なもの」の構造として「自己表出と指示表出」を想定している。自己表出は関係の表出、指示表出は指示の表出である。また、「論理的なもの」を複素数をモデルにして表示している。「論理的なもの」A＝a＋b i において実数部分 (a) が自己表出、虚数部分 (bi) が指示表出である。弁証法の場所的構造とは選択された 2 つの「論理的なもの」の自己表出と指示表出が結合して、関係性と指示性が広がっていく場面を表現している。付録 3・4 を参照。

ここで、上辺・中央の bi + a を指数関数 (1) 、下辺・中央の c + di を n 倍角の公式 (2) とする。指数関数と n 倍角の公式の特徴をみてみると、指数関数 (1) の自己表出と指示表出は極限を使った定義に関連するもので、連続複利法[6]ともいうべき

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

という特徴的な形をもっている。他方、n 倍角の公式 (2) の自己表出と指示表出は、三角関数の複素数表現に関連するもので、余弦と正弦の虚数単位 i による結合

$$\cos z + i\sin z$$

という特徴的な形をもっている。オイラーの頭の中で、極限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ と虚数単位 i が焦点になって、指数関数と三角関数が関係しはじめる。

3　n 倍角の公式 への極限の導入

指数関数と三角関数がどのように統一されていったのかを追ってみよう。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{c} & \leftarrow & \mathrm{bi} & + & \mathrm{a} & \rightarrow & \mathrm{di} \\ + & & \uparrow & & \downarrow & & + \\ \mathrm{bi} & \leftarrow & \mathrm{c} & + & \mathrm{di} & \rightarrow & \mathrm{a} \end{array}$$

右側の a + di（縦に並んでいる di + a） は、指数関数の自己表出と n 倍角の公式の指示表出が結合している。この結合は n 倍角の公式に極限（指数関数の自己表出）を導入する方向を指示しているといえる。n 倍角の公式への極限の導入をみていこう。

まず、オイラーは弧 z を注視する。x を定数のように考え $z = x/n$ とおく。n を大きくしていくと z は小さくなって 0 に近づいていく。z は角 0 と x との間を n 等分して得られる小さな円弧の長さを表わしている。式で示せば、

$$z = \frac{x}{n}$$
$$nz = x$$

である。これを n 倍角の公式 (2) に代入すると、次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{\left(\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}\right)^n+\left(\cos\frac{x}{n}-i\sin\frac{x}{n}\right)^n}{2} \\ \sin x &= \frac{\left(\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}\right)^n-\left(\cos\frac{x}{n}-i\sin\frac{x}{n}\right)^n}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

さて、ここで $nz = x(z = x/n)$ という関係について確認しておこう。志賀浩二は次のように述べている。

> n を大きくして z を小さくしていくと、究極的には、円弧の長さ z と半弦の長さ $\sin z$ との比は 1 になりますから、この究極の状況を調べるため、たぶんオイラーは迷うことなく近似式を等号におきかえて、

[6]遠山啓 『微分と積分』 日本評論社

$$\sin z = z = \frac{x}{n}$$
$$\cos z = 1$$

とおく。いいかえれば、

$$\sin \frac{x}{n} = \frac{x}{n}$$
$$\cos \frac{x}{n} = 1$$

と仮定する。オイラーは「消失する弧はその正弦に等しいし、消失するこの余弦は [単位円周の] 半径に等しいことに留意して」と述べている。したがって、(3) は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{\left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n + \left(1 - i\frac{x}{n}\right)^n}{2} \\ \sin x &= \frac{\left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{x}{n}\right)^n}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

これによって、n 倍角の公式は指数関数の特徴的な形、連続複利法の形と対応する可能性をもったといえる。そして、オイラーは極限をとる。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n + \left(1 - i\frac{x}{n}\right)^n}{2} \\ \sin x &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{x}{n}\right)^n}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

この (5) が、説明のために示した図式（ひろがるかたち）の右側の a + di（縦に並んでいる di + a） に対応する式である。

4　指数関数への虚数単位の導入

こんどは左側の c + bi （縦に並んでいる c + bi） を見てみよう。

左側の c + bi は、n 倍角の公式の自己表出と指数関数の指示表出が結合している。この結合は指数関数の定義に虚数 (n 倍角の公式の自己表出）を導入する方向を指示する。指数関数の定義 (1) に虚数 i が導入される。

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$$
$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n \tag{6}$$

この (6) が、左側の c + bi （縦に並んでいる c + bi） に対応する式である。

このように、オイラーは虚数単位 i を用いて表わした n 倍角の公式 (2) と極限を使って定義された指数関数の定義 (1) を関連させた。極限を使って定義された指数関数の定義には、最初はなかった虚数単位が導入されている。これは n 倍角の公式の自己表出と指数関数の指示表出が結合することによって可能となったと

いえる。他方、虚数単位 i を用いて表わした n 倍角の公式には、最初はなかった極限が導入されている。これは指数関数の自己表出と n 倍角の公式の指示表出が結合することによって可能となったと考えられる。いまや指数関数にも n 倍角の公式にも極限 $\lim_{n\to\infty}$ と虚数単位 i が備わっている。こうして最初の指数関数と n 倍角の公式は、極限が導入された n 倍角の公式 (5) と虚数が導入された指数関数 (6) に姿を変えて、左右に対立している。

5 オイラーの公式

極限が導入された n 倍角の公式 (5) と虚数が導入された指数関数 (6) は統一される。(6) を (5) に代入すると、まず三角関数が指数関数で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

次に指数関数が三角関数で表現される。(7) の $\sin x$ に i をかけて、(7) の $\cos x$ を加える。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ i\sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \end{aligned}\right\}$$

両辺を入れかえると、冒頭でみたオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{8}$$

が得られる。オイラーは次のように述べている。

> これらの公式により、虚指数量が実の弧の正弦と余弦に帰着される様式が理解される。

6 公式の導出と弁証法の対応

「オイラーの公式」の導出過程を整理しておこう。

1 まず、オイラーは 2 つの「論理的なもの」を出発点とする。「極限を使って定義された指数関数」と「虚数単位 i を用いた n 倍角の公式」である。

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos nz &= \frac{(\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n}{2} \\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

である。

2　次に、オイラーはこの 2 つを関連させて、「極限が導入された n 倍角の公式」と「虚数単位 i が導入された指数関数」を導出する。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+i\frac{x}{n}\right)^n + \left(1-i\frac{x}{n}\right)^n}{2} \\ \sin x &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+i\frac{x}{n}\right)^n - \left(1-i\frac{x}{n}\right)^n}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1+i\frac{x}{n}\right)^n \tag{6}$$

3　そして、オイラーは「極限が導入された n 倍角の公式」と「虚数単位 i が導入された指数関数」を統一する。

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{8}$$

表 (弁証法の過程的構造)[7]にまとめておこう。

1（選択）	Ａ＝ａ＋ｂｉ	(1)
	Ａ′＝ｃ＋ｄｉ	(2)
2（混成）	Ａ×Ａ′＝（ａ＋ｂｉ）×（ｃ＋ｄｉ）	(5)(6)
	≒（ａ＋ｄｉ）×（ｃ＋ｂｉ）	
3（統一）	＝（ａｃ－ｂｄ）＋（ａｂ＋ｃｄ）ｉ	(7)(8)
	＝ｘ＋ｙｉ	
	＝Ｂ	

選択 (1)(2) から混成 (5)(6) が導出される過程に「対話」の契機をみることができる。混成の段階で (1)(2) は役割を終えてここで「止」まる。混成モメント (5)(6) は次の統一の段階 (7)(8) へ「揚」がる。この過程に「止揚」の契機をみることができる。

「オイラーの公式」は、オイラーが極限を使って定義された指数関数と虚数単位を用いた n 倍角の公式を選択・混成・統一することによって導出した「論理的なもの」であるということができる。

さて、オイラーは極限に移る前に、

$$\sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}$$

$$\cos\frac{x}{n} = 1$$

とおいた。

これはオイラーの発想の核心にあったものである。志賀浩二は次のように述べている。

[7]弁証法は 3 段階の過程をもっている。1 選択・2 混成・3 統一である。選ばれた 2 つの「論理的なもの」が 1 つの「論理的なもの」に統一される過程を表わしているので、1 選択・2 混成・3 統一を弁証法の過程的構造とよぶ。弁証法の場所的構造は「ひろがる」かたちを表わすのに対して、過程的構造は「つながる」かたちを表わしている。付録 4 を参照。

等分点を極限まで追いつめ、円弧の長さと半弦の長さの違いなど霧の中に消えてしまうような究極の場所にオイラーははじめて立つことができたのです。その場所でそれまで誰も予想したことのなかった夢のような一つの公式を導いたのです。それがオイラーの公式でした。

オイラーが極限に移る前におこなったこのような置き換えは、極限と収束について厳密な現代の数学の立場からは許されていないのだという。しかし、オイラーの「大胆な無限への踏みこみかた」の魅力を否定できず、志賀浩二は次のように述べて「オイラーの公式」の考察を終えている。

あらためてオイラーの「発見的証明」を読みなおすと、鋭い針先でエッチングが描かれていくさまを見るような快い感触があり、このような論法を正当化するような、なにか包括的な数学の考えかたがないものかと、望まれるような気分になってきます。

しかし、オイラーの論法を正当化するような包括的な数学の考えかたは、おそらく実現することはないだろう。オイラーの「発見的証明」は、「包括的な数学の考えかた」としてではなく、数学のなかにある「弁証法」として考えるべきではないかと思うのである。

（了）

7　付録1・オイラーによる虚数単位 i を用いた n 倍角の公式の導出

オイラーは三角関数のよく知られた公式から出発する。

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

n 倍角の公式の $(\cos z + i \sin z)$ と $(\cos z - i \sin z)$ は、これを因数分解してできる因数である。この複素数で表現されている因数は有用という理由で導入されている。オイラーは次のように述べている。

これらの因数は虚因子ではあるが、いくつかの弧を組み合わせたり、弧と弧を乗じたりする際にきわめて注目すべき役割を果たす。

オイラーは複素数で表現した三角関数の代数計算と三角関数の加法定理から、ド・モアブルの公式を導いていく。

$(\cos y + i \sin y)$ と $(\cos z + i \sin z)$ の積

$$(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z)$$

を展開して、実数部分と虚数部分にわけると、

$$(\cos y \cos z - \sin y \sin z) + i(\sin y \cos z + \cos y \sin z)$$

が得られる。ここで加法定理

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos(y + z)$$

$$\sin y\cos z+\cos y\sin z=\sin(y+z)$$

より、

$$(\cos y+i\sin y)(\cos z+i\sin z)=\cos(y+z)+i\sin(y+z) \tag{1}$$

と書ける。同じように、

$$(\cos y-i\sin y)(\cos z-i\sin z)=\cos(y+z)-i\sin(y+z) \tag{2}$$

また、因数を1つ増やし複号でまとめると

$$(\cos x\pm i\sin x)(\cos y\pm i\sin y)(\cos z\pm i\sin z)=\cos(x+y+z)\pm i\sin(x+y+z) \tag{3}$$

となる。（複号同順、以下の式も同じ）

(1) と (2) で $y=z$ とおくと、

$$(\cos z\pm i\sin z)^2=(\cos 2z\pm i\sin 2z).$$

また、(3) で $x=y=z$ とおくと

$$(\cos z\pm i\sin z)^3=(\cos 3z\pm i\sin 3z).$$

したがって、一般に

$$(\cos z\pm i\sin z)^n=(\cos nz\pm i\sin nz)$$

となる。これがド・モアブルの定理である。見やすくするために、複号を加法と減法に分け、左辺と右辺を入れ替える。

$$\cos nz+i\sin nz=(\cos z+i\sin z)^n$$

$$\cos nz-i\sin nz=(\cos z-i\sin z)^n$$

これを $\cos nz$ と $\sin nz$ について解いたものが、虚数単位 i を用いた n 倍角の公式である。

$$\left.\begin{aligned}\cos nz&=\frac{(\cos z+i\sin z)^n+(\cos z-i\sin z)^n}{2}\\ \sin nz&=\frac{(\cos z+i\sin z)^n-(\cos z-i\sin z)^n}{2i}\end{aligned}\right\}$$

（了）

8　付録2・オイラーによる sin と cos の巾級数展開の導出

オイラーが導いた虚数単位 i を用いた n 倍角の公式は次のようなものだった。

$$\left.\begin{aligned}\cos nz&=\frac{(\cos z+i\sin z)^n+(\cos z-i\sin z)^n}{2}\\ \sin nz&=\frac{(\cos z+i\sin z)^n-(\cos z-i\sin z)^n}{2i}\end{aligned}\right\}$$

ここで 2 項定理を使って右辺を展開すると、$\cos nz$ と $\sin nz$ を $\cos z$、$\sin z$ の n 次式として表わす n 倍角の公式になる。$\cos nz$ と $\sin nz$ について、右辺の展開を書き下ろしてみよう。$\cos nz$ では 2 項係数の右下の添字が偶数の項が残る。$\sin nz$ では奇数の項が残る。

$$\begin{aligned}\cos nz &= {}_nC_0 \cos^n z - {}_nC_2 \cos^{n-2} z \sin^2 z + {}_nC_4 \cos^{n-4} z \sin^4 z - \cdots \\ &= \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} z \sin^2 z \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} z \sin^4 z - \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sin nz &= {}_nC_1 \cos^{n-1} z \sin z - {}_nC_3 \cos^{n-3} z \sin^3 z + {}_nC_5 \cos^{n-5} z \sin^5 z - \cdots \\ &= \frac{n}{1} \cos^{n-1} z \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos^{n-3} z \sin^3 z \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cos^{n-5} z \sin^5 z - \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

いま x を定数のように考え、$z = x/n$ とおく[8]。このとき n をどんどん大きくしていくと、それに応じて z はどんどん小さくなって 0 に近づいていく。$nz = x$ という関係は、z は、角 0 と x との間を n 等分して得られる小さな円弧の長さであることをしめしている。n を大きくして z を小さくしていくと、究極的には、円弧の長さと半弦の長さ $\sin z$ との比は 1 になる。この究極の状況を調べるため、オイラーは迷うことなく近似式を等号におきかえた。

$$\sin z = z = \frac{x}{n}$$
$$\cos z = 1$$

(1) と (2) は次のようになる。

$$\cos nz = 1 - \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left(\frac{x}{n}\right)^4 - \cdots \tag{3}$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\left(\frac{x}{n}\right)^5 - \cdots \tag{4}$$

(3) と (4) の式で $n \to \infty$ としてみる。このとき左辺は $\cos nz = \cos x, \sin nz = \sin x$ だから一定で、右辺だけが無限に向かって走りだすのである。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots \tag{5}$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \cdots \tag{6}$$

これが cos と sin の巾級数展開にほかならない。この導出はオイラーの公式の導出のステップとなった。志賀浩二は次のように述べている[9]。

[8]志賀浩二の「ですます」を「である」に替えている。実質、ここは引用である。ただし、志賀は sin だけだが、ここでは cos も同時にあつかっているので、変更（追加）した個所がある。

[9]$\cos x$ を追加して引用

オイラーは、しかしさらに大胆でした。オイラーは $\sin z = z$ とし、$\cos z = 1$ とおくこの近似の方法が、$\cos x$ と $\sin x$ の正しい巾級数展開の結果へと導いたことに自信を深めたのかもしれません。オイラーはここで数学史上決定的ともいえる一歩を踏み出し、こんどは虚数単位 i の入ったままの n 倍角の公式に同じ論法を適用してみたのです。

（了）

9　付録３・「論理的なもの」

9.1　自己表出と指示表出

記号には、記号外のなんらかのものと関係をもっているものと、記号同士を結びつける働きをする別の記号がある（沢田允茂『現代論理学入門』参照）。前者は事物に関係する働きをもつ記号で、例えば「名詞」「動詞」「形容詞」などである。また、後者は接着剤の働きをする記号で、「助詞」「助動詞」「接続詞」などである。この２種類の記号は、時枝文法でいえば「詞」と「辞」に対応する。

「論理的なもの」は、何らかの認識が言語や記号で表現されたものである。例えば、理論、命題、法則、公式、主張、規定、見解、意見などである。これらの「論理的なもの」にも記号のもつ２つの側面を認めることができる。「論理的なもの」には、「論理的なもの」の外の対象と関係をもち、その指示を表出する側面がある。また、「論理的なもの」同士を結び付け対象に対する関係を表出する側面がある。前者を「論理的なもの」の指示表出、後者を「論理的なもの」の自己表出とよぶ。「自己表出と指示表出」は『言語にとって美とはなにか』（吉本隆明）から借りているものである。

例えば、周期律（「論理的なもの」）をみる場合、元素の性質やその周期性の記述、原子の構造が指示表出にあたる。これは周期律の「詞」とみることができる。他方、個々の元素の構造や性質を関連させ、法則として統一させる周期表やパウリの排他原理が自己表出にあたる。これは周期律の「辞」である。

対象を理解する能力が悟性で、その理解をもとに推論を行うのが理性であるとする考え方がある。これによれば、指示表出は悟性 (understanding) に基づき、自己表出は理性 (reasoning) に基づいているということができる。

指示表出と自己表出は著名な科学者の考えのなかで確認することができる。アインシュタインは新しい理論をつくるときの観点（基準）として、1「外からの検証」と 2「内からの完成」を想定している（「自伝ノート」）。1 は「理論は経験事実と矛盾してはならない」ことを指している。また 2 は観測データとの関係ではなく、理論の前提そのものの「自然さ」「単純性」「対称性」などと関係している。1「外からの検証」は指示表出、2「内からの完成」は自己表出と対応しているといえるだろう。

9.2　複素数モデル

「論理的なもの」は自己表出と指示表出の 2 つの側面をもつ。この 2 つの側面を複素数の実部と虚部の 2 つの側面に対応させると見通しがよくなる。「論理的なもの」の複素数モデルである。

「論理的なもの」＝（自己表出）＋（指示表出）i

「論理的なもの」を $A = a + bi$、$A' = c + di$ で表わす。ここで a と c は自己表出、bi と di は指示表出である。区別しやすいように i を付けて書く。そして、複素数のかけ算を考える。

$$
\begin{aligned}
A \times A' &= (a + bi)(c + di) \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i \\
&= x + yi \\
&= B
\end{aligned}
$$

かけ算は 2 つの異なる複素数から 1 つの複素数が出てくる過程を表わしている。これを 2 つの異なる「論理的なもの」から 1 つの「論理的なもの」が形成される過程のモデルとする。すなわち、2 つの「論理的なもの」（$A = a + bi$ と $A' = c + di$）を出発点にして、その自己表出（a と c）と指示表出（bi と di）が関連しあい、新しい自己表出 $ac - bd = x$ と新しい指示表出 $(ad + bc)i = yi$ をもつ 1 つの「論理的なもの」(B) が形成される過程を表わしている。いいかえれば、複素数のかけ算は、2 つの「論理的なもの」の指示性と関係性を基礎にして、新しい指示性と関係性が形成される過程を表現している。

これはケストラーの創造活動の理論バイソシエーション bisociation（二元結合）のモデルとみることができる。

（了）

10　付録 4・弁証法の理論

付録 3 で示した複素数のかけ算は、出発点とした「論理的なもの」の自己表出と指示表出から、新しい自己表出と指示表出が形成され過程を表現している。しかし、数学の公式通りの展開である。その意味ではかけ算は同じレベルで考えられていて連続している。ここにギリシア弁証法のダイアローグ（「対話」）とヘーゲル弁証法のアウフヘーベン（「止揚」）を導入して非連続化する。これが弁証法の複素数モデルになる。

10.1　「対話」の基礎

対話のモデルをマルクスの「商品」分析を参考にして作ってみる。2 つの商品の「価値と使用価値」の関係を対話のモデルの基礎におく。価値形態 1 の「リンネルと上着」の「価値と使用価値」の関係みておこう。

「リンネルの使用価値」	＋	「リンネルの価値」
		↓
「上着の価値」	＋	「上着の使用価値」

矢印が価値を表現しようとする働きかけである。（矢印の起点が相対的価値形態、矢印の終点が等価形態である。）リンネルはその価値を上着で表現する。このとき、上着はこの価値表現の材料の役をつとめている。リンネルの価値が上着の使用価値で表現されることを、リンネルの価値に上着の使用価値が出現すると考える。すなわち、リンネルは自分に固有の価値と使用価値に加えて、第 3 の要素をもつようになると考える。「リンネルの価値」から右方向に矢印をひき、矢印の終点に「上着の使用価値」と表記する。

これに対して、上着の使用価値が価値表現の材料になっていることは、上着の使用価値にリンネルの価値が出現すると考える。すなわち、上着は自分に固有の価値と使用価値に加えて、第 3 の要素をもつようになると考える。「上着の使用価値」から右方向に矢印をひき、「リンネルの価値」と表記する。次のようである。

「リンネルの使用価値」 ＋ 「リンネルの価値」 → 「上着の使用価値」
↓
「上着の価値」 ＋ 「上着の使用価値」 → 「リンネルの価値」

リンネルの働きかけによって第 3 の要素が出現する。つまり、リンネルに「上着の使用価値」が出現し、また上着に「リンネルの価値」が出現する。

ここに上着の働きかけを加え、リンネルと上着が同時に働きかける場合を考える。「上着の価値」（左下）から「リンネルの使用価値」（左上）の矢印が加わる。

「リンネルの使用価値」 ＋ 「リンネルの価値」
↑ ↓
「上着の価値」 ＋ 「上着の使用価値」

上着はその価値をリンネルで表現する。リンネルはこの価値表現の材料の役をつとめる。左側に第 3 の要素が出現する。上着の価値を表現する場合が左側に付け加わる。(「A はリンネル、A′ は上着である。)

「A′ の価値」 ← 「A の使用価値」 ＋ 「A の価値」 → 「A′ の使用価値」
＋ ↑ ↓ ＋
「A の使用価値」 ← 「A′ の価値」 ＋ 「A′ の使用価値」 → 「A の価値」

これが 2 つの「商品」が相対したときの「価値と使用価値」の関係である。

10.2 「対話」のモデル

２つの「商品」の「価値と使用価値」の関係において、1「商品」を「論理的なもの」に、2「価値と使用価値」を「自己表出と指示表出」に置き換える。さらに、3 自己表出と指示表出をアルファベットで表わす。すると 2 つの「論理的なもの」が対立しているモデルができる。このとき「働きかけ」の矢印は推論と考える。第 3 の要素が出現した局面は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{c} & \leftarrow & \mathrm{bi} & + & \mathrm{a} & \rightarrow & \mathrm{di} \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{bi} & \leftarrow & \mathrm{c} & + & \mathrm{di} & \rightarrow & \mathrm{a} \end{array}$$

吉本は言語表現において、自己表出と価値、また指示表出と意味は密接に関係していることを指摘している。ここから類推してみると、Aの自己表出に A′ の指示表出が出現することは、Aが新しい意味をもちはじめていると解釈できるだろう。これに対して、A′ の指示表出にAの自己表出が出現することは、A′ が新しい価値をもちはじめていると解釈できる。A と A′ の対立関係から第 3 の要素が出現する局面は、A と A′ がそれぞれ新しい意味と価値をもちはじめていることを表わしている。ここで左右の第 3 要素の結合を考える。

$$
\begin{array}{ccccccc}
c & \leftarrow & bi & + & a & \rightarrow & di \\
+ & & \uparrow & & \downarrow & & + \\
bi & \leftarrow & c & + & di & \rightarrow & a
\end{array}
$$

「対話」を導入することによって、これまでとは異なった関係性と指示性の可能性がうまれていることを表現できるのである。

10.3　「止揚」のモデル

弁証法の過程において、2 つの「論理的なもの」は足場になるだけである。新しい「論理的なもの」は第 3 の要素の結合によって形成される。

$$
\begin{array}{ccccccc}
c & \leftarrow & bi & + & a & \rightarrow & di \\
+ & & \uparrow & & \downarrow & & + \\
bi & \leftarrow & c & + & di & \rightarrow & a
\end{array}
$$

図の中央部の bi + a と c + di が足場である。bi + a と c + di の 4 つの要素は、a + di（右側）と c + bi（左側） に保存される。中央の bi + a と c + di はここで役割を終える一方、a + di と c + bi はモメントとして次の段階へと進む。この図のなかに、アウフヘーベン（Aufheben）の 3 つの意味（1「保存する」、2「廃棄する」、3「持ちあげる」）を確認できる（中埜肇『弁証法』参照)。

「保存する」 ——中央部の bi + a と c + di は、両側の a + di と c + bi に保存される。いいかえれば、A と A′ に固有の自己表出と指示表出は、左右の混成モメントの自己表出と指示表出として保存される。「廃棄する」 ——中央部の bi + a と c + di は、ここで役割を終え廃棄される。「持ちあげる」——両側の混成モメント a + di と c + bi は次のステップへと持ちあげられる。アウフヘーベン（Aufheben）は止揚と翻訳されている。上手な訳といえるだろう。 bi + a と c + di はここで「止」まり、 a + di と c + bi は次の段階へ「揚」がるのである。あるいは揚棄とも訳されている。こちらは次のようにいうことができる。 a + di と c + bi を次の段階へ「揚」げるために、bi + a と c + di をここで「棄」てるのである。

10.4　ひらがな弁証法

付録 3 で示した複素数のかけ算は同じレベルで考えられていて連続していた。ここに「対話」と「止揚」を導入することによって非連続化した。これが弁証法の複素数モデルである。「対話」のモデルをひろがるかたち（場所的構造）とよぶ。また「止揚」のモデルをつながるかたち（過程的構造）とよぶことにする。はじまりは 2 つの「論理的なもの」、A ＝ａ＋ｂｉ と A′ ＝ｃ＋ｄｉである。

・ひろがるかたち（場所的構造）

$$
\begin{array}{ccccccc}
c & \leftarrow & bi & + & a & \rightarrow & di \\
+ & & \uparrow & & \downarrow & & + \\
bi & \leftarrow & c & + & di & \rightarrow & a
\end{array}
$$

・つながるかたち（過程的構造）

1（選択）	Ａ＝ａ＋ｂｉ
	Ａ’＝ｃ＋ｄｉ
2（混成）	Ａ×Ａ’＝（ａ＋ｂｉ）×（ｃ＋ｄｉ）
	≒（ａ＋ｄｉ）×（ｃ＋ｂｉ）
3（統一）	＝（ａｃ－ｂｄ）＋（ａｂ＋ｃｄ）ｉ
	＝ｘ＋ｙｉ
	＝Ｂ

ひろがるかたち（場所的構造）の中央にある bi +a と c+di は、つながるかたち（過程的構造）の２（混成）の上部（ａ＋ｂｉ））×（ｃ＋ｄｉ）に対応している。また、ひろがるかたち（場所的構造）の両側のａ＋ｄｉとｃ＋ｂｉ（縦に並んでいる第３の要素） は、２（混成）の下部（ａ＋ｄｉ）×（ｃ＋ｂｉ）に対応している。

混成の段階（ａ＋ｂｉ）×（ｃ＋ｄｉ）≒（ａ＋ｄｉ）×（ｃ＋ｂｉ）において、＝ではなく≒で表記しているは、この過程が純粋な論理的な過程ではなく、飛躍を含んでいるからである。≒は、「およそ等しい」を表わす記号である。選ばれた２つの「論理的なもの」とは異なった関係性と指示性が形成されていること、また、新しい価値と意味が形成されていることを表わしている。

また、混成モメント（ａ＋ｄｉ）×（ｃ＋ｂｉ）の後が、ふたたび＝（等号）にもどるのは、この過程は論理的な過程だからである。ひろがるかたち（場所的構造）とつながるかたち（過程的構造）の混成の段階が弁証法の核心である。

２つの「論理的なもの」を「あれ」と「これ」とよぶことにしよう。また、ひろがるかたち（場所的構造）を「むすんでひらいて」、つながるかたち（過程的構造）を「ふたつをひとつにつなぐ」とよぶことにすると、弁証法は次のように「ひらがな」で表現できる。

あれとこれとむすんでひらいてふたつをひとつにつなぐわざ

（了）

2016 年 12 月 29 日

参考文献

[1] オイラー/高瀬正仁訳 『オイラーの無限解析』 海鳴社 2001 年

[2] 志賀浩二 『無限のなかの数学』 岩波新書 1995 年

[3] 遠山啓 『微分と積分』 日本評論社 1970 年

[4] 吉田武 『虚数の情緒』 東海大学出版会 2000 年

[5] 嶋喜一郎「ひらがな弁証法」(https://mtbird.web.fc2.com/hiragana-dialectic.html) 2010 年